# Lehrbuch der Arithmetik

für

Latein-, Real-, Gewerb- und gewerbliche Fortbildungs-Schulen

von

Dr. Friedrich [illegible],

Lehrer

an [illegible] Lehranstalt.

[illegible]



<36637223760016




München. 1874.

Verlag von [illegible].

# Lehrbuch

der

# Arithmetik

für

Latein-, Real-, Gewerb- und gewerbliche Fortbildungs-Schulen

von


**Dr. Friedrich Ustrich,**

Director

der Widmann'schen Lehranstalt.


Zur Einführung empfohlen durch hohe Entschließung des k. Staatsministeriums für Kirchen- und Schulangelegenheiten vom 20. September 1874 Nr. 5854. (Siehe Ministerialblatt für Kirchen- und Schulangelegenheiten Nr. 36 vom 26. September 1874.)


München, 1874.

Verlag von Höpfner & Grammer.

Druck von H. Kutzner, Färbergraben Nr. 29.

# Vorrede.

Mit dem vorliegenden Leitfaden der Arithmetik, welcher den Zweck hat, das zeitraubende Diktiren zu vermeiden, glaube ich, die Grundzüge der Arithmetik als Unterrichtsgegenstand an humanistischen und technischen Lehranstalten in ein systematisches Ganze gebracht zu haben. Bei Abfassung desselben waren Weckung und Schärfung des Verstandes, dann Anwendung des Verstandenen die leitenden Gesichtspunkte und habe ich mein Augenmerk genau darauf gerichtet, allen mechanischen Gedächtnißkram zu beseitigen, um die Schüler zum Denken, der Hauptaufgabe jedes Unterrichtes, anzuhalten. Ueberhaupt war ich von dem Gedanken beseelt, ein gründliches, den Geist anregendes und fruchttragendes Rechnen zu fördern. In wie weit ich Zweck und Absicht, etwas Notwendiges und Unentbehrliches zu schaffen, erreicht habe, überlasse ich getrost der geneigten Beurtheilung meiner Herren Amtsgenossen mit der Erklärung, daß mir berichtigende Notizen zu meinem Buche stets willkommen sind und seiner Zeit die geeignete Berücksichtigung finden werden.

Arithmetik ist die Grundlage der gesammten Mathematik! Nur ihr richtiges Verständniß, nur ihr gründliches Wissen läßt mit Erfolg die Stufenleiter der verschiedenen mathematischen Zweige erklimmen. Dem Inhalte nach will mein Buch nichts Neues bieten, aber in Anordnung und Behandlung des Lehrstoffes, namentlich aber durch seine Kürze dürfte sich dieser Leitfaden von vielen andern, durch ihren Umfang für den Anfangsunterricht unpraktischen Lehrbüchern der Arithmetik zu seinem Vorteile unterscheiden.

Die als best bekannten Werke z. B. von Hofmann, Dr. Hauck ꝛc., die musterhaft angelegten Scripten des kgl. Gymnasialprofessors Dr. Klein, sowie die des kgl. Rektors Dr. Miller von München waren meine Quellen; meine mehrjährige Lehrthätigkeit gab manch' trefflichen Wink. Daß die Beweise für die einzelnen Lehrsätze manchmal ausführlicher, manchmal nur andeutungsweise gegeben sind, kann mir

nicht zum Vorwurfe gemacht werden; denn einerseits wäre durch eine weitere Ausführung aller Beweise der Umfang des Buches allzusehr gewachsen, anderseits wird es dem Schüler leicht sein, aus den gegebenen Andeutungen bei geeigneter Nachhilfe des Lehrers die Beweise selbst auszuführen.

Nachdem ein anregender und wahrhaft fördernder Unterricht in der Arithmetik unbestritten die Lösung zahlreicher Aufgaben erfordert, so habe ich vielfach ausgesprochenen Wünschen entsprechend meinem Lehrbuche eine mit demselben im System übereinstimmende Aufgaben-Sammlung folgen lassen.

Möge dieses Werkchen, das ich getrost in uneigennützigster Absicht in die Oeffentlichkeit schicke, bei meinen Collegen eine gute Aufnahme finden und seinen Endzweck in bestem Maße erfüllen.

München in den Osterferien 1874.

**Dr. Fr. Ustrich.**

# Inhaltsverzeichniß.

## Anhang.

### Metrische Maße, Gewichte und Münzen.

# Einleitung.

Arithmetik ist die Lehre von den Zahlen und Zahlenverbindungen.

Unter einer Zahl versteht man sowol die Einheit (1), als eine bestimmte Menge von unter sich gleichen Einheiten. z. B. 5, 7 ꝛc.

Zahlen heißen unbenannt, wenn die Art der Einheiten nicht näher bezeichnet ist. z. B. 4 Einheiten oder (abgekürzt gesprochen) 4.

Zahlen heißen benannt, wenn die Art der Einheiten genauer bestimmt ist. z. B. 7 Einheiten von 7 Mark oder kurzweg 7 Mark.

Zahlen von derselben Benennung heißen gleichartig. z. B. 2 Mark und 5 Mark.

Zahlen von ungleicher Benennung heißen ungleichartig. z. B. 2 Mark und 5 Francs.

Aus bekannten oder gegebenen Zahlen durch gewisse Veränderung derselben (Operationen) andere unbekannte Zahlen aufsuchen, heißt rechnen.

## I. Numeriren.

Unter Numeriren versteht man eine doppelte Verrichtung:

1) jede in Ziffern gegebene Zahl auszusprechen,
2) jede ausgesprochene Zahl mit Ziffern zu schreiben.

Ziffern sind die Zeichen für die Zahlen.

Wir rechnen mit den sogenannten arabischen Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Jede Ziffer hat einen doppelten Wert, nämlich einen ursprünglichen (Nominal- oder Nennwert) und einen Local- oder Stellenwert, dem die Zahl 10 zu grunde gelegt ist.

Zur Ausfüllung unbesetzter Stellen bedient man sich der Null (0).

Vorhergehende Zahlen mit Einschluß der 0 reichen aus, um alle möglichen Zahlen auszudrücken.

Dieses auf der Zahl 10 beruhende System des Numerirens heißt das dekadische System (Decimalsystem).

Das dekadische System besteht in seiner Grundeigenschaft darin, daß zehn Einheiten einer niedern Ordnung immer eine Einheit einer höhern Ordnung geben.

## II. Unbenannte ganze Zahlen.

Jede Zahl kann einer doppelten Veränderung unterworfen werden, der Vermehrung und Verminderung; erstere wird bewirkt durch Addition und Multiplication, letztere durch Subtraction und Division.

Wir unterscheiden demnach vier Grundrechnungsarten (species) nämlich: Addition, Subtraction, Multiplication und Division.

## 1. Addition.

Zwei oder mehrere Zahlen addiren, heißt eine neue Zahl suchen, welche ebenso viele Einheiten enthält, als die gegebenen zusammen.

Die Zahlen, welche addirt werden sollen, heißen Summanden, das Resultat der Addition heißt Summe. Das Zeichen der Addition ist ein stehendes Kreuz (+) das plus=Zeichen. Durch dieses plus=Zeichen werden die Summanden verbunden.

5 + 7 (ausgesprochen 5 plus 7) = 12

formelle — wirkliche

Summe.

5 und 7 sind die Summanden.

Anm. 1. In jeder Summe lassen sich die Summanden beliebig vertauschen.
$5 + 7 + 6 + 3 = 3 + 6 + 7 + 5 = 21.$

Anm. 2. $8 + 0 = 8.$

Anm. 3. Bei der Addition von größeren Zahlen schreibt man die Zahlen gewöhnlich unter einander und zwar Einheiten unter Einheiten, Zehner unter Zehner u. s. w. z. B.

$156 + 3781 + 19023 = 22960$ oder

```
  156
 3781
19023
-----
22960
```

## 2. Subtraction.

Zwei Zahlen subtrahiren heißt eine dritte Zahl suchen, welche zur zweiten addirt die erste als Summe gibt.

Diejenige Zahl, welche vermindert, oder von der abgezogen werden soll, heißt Minuend; diejenige Zahl, welche abgezogen werden soll, heißt Subtrahend. Das Resultat der Subtraction heißt Unterschied, Rest oder Differenz.

Minuend und Subtrahend werden durch das Subtractions= oder minus=Zeichen (—) verbunden

z. B. Minuend Subtrahend

9 — 2 = 7

formelle — wirkliche

Differenz.

Anm. $8 - 0 = 8$
$8 - 8 = 0.$

Probe der Addition und Subtraction.

a) Die Probe der Addition ist die Subtraction.

Die Regel lautet:

Man läßt einen beliebigen Summanden weg, addirt die übrigen Summanden, subtrahirt die zweite Summe (Teilsumme) von der ursprünglichen (Hauptsumme), so muß, wenn die Rechnung richtig ist, der weggelassene Summand als Differenz erscheinen.

z. B. 4 + 7 + 9 + 8 + 10 + 5 = 43
Probe 4 + 7 + 9 + 8 + 10 + 5 = 39

| Hauptsumme | | Teilsumme | | weggelassener Summand |
|---|---|---|---|---|
| 43 | — | 39 | = | 4 |

b) Die Probe der Subtraction ist die Addition.

Die Regel der Subtraction lautet:

1) Subtrahend + Differenz = Minuend
2) Minuend — Differenz = Subtrahend

also in dem Beispiele 9 — 2 = 7

| | Differenz | | Subtrahend | | Minuend |
|---|---|---|---|---|---|
| 1) | 7 | + | 2 | = | 9 |
| | **Minuend** | | **Differenz** | | **Subtrahend** |
| 2) | 9 | — | 7 | = | 2 |

Anm. Auf der ersten Regel der Subtractionsprobe beruht das neuere Verfahren der Subtraction

z. B. 1)

```
  9 8 7 6 5
— 1 2 4 1 3
-----------
  8 6 3 5 2
```

Man rechnet:

3 Einheiten u. 2 Einheiten = 5 Einheiten
1 Zehner u. 5 Zehner = 6 Zehner
4 Hundert u. 3 Hundert = 7 Hundert
2 Tausend u. 6 Tausend = 8 Tausend
1 Zehntausend u. 8 Zehntausend = 9 Zehntausend

kürzer

2 u. 3 = 5
1 u. 5 = 6
4 u. 3 = 7
2 u. 6 = 8
1 u. 8 = 9

2)

```
 3 8 5 7 9 8 1 0 6
 1 9 6 8 9 9 8 7 6
-----------------
 1 8 8 8 9 8 2 3 0
```

```
              6 u. 0 =  6
              7 u. 3 = 10 bleibt 1
1 u. 8 ist  9 u. 2 = 11   „    1
1 u. 9 ist 10 u. 8 = 18   „    1
1 u. 9 ist 10 u. 9 = 19   „    1
1 u. 8 ist  9 u. 8 = 17   „    1
1 u. 6 ist  7 u. 8 = 15   „    1
1 u. 9 ist 10 u. 8 = 18   „    1
1 u. 1 ist  2 u. 1 =  3   „
```

} oder zählt man 1 zur nächsthöhern Sorte.

Dieses anscheinend schwierigere Verfahren ist unbedingt notwendig, um später die abgekürzte Division anwenden zu können.

## 3. Multiplication.

Zwei Zahlen multipliciren heißt die eine so oft als Summand setzen, als die andere angibt.

z. B. 7 × 4 = 7 + 7 + 7 + 7 = 28.

Das Zeichen der Multiplication ist entweder ein liegendes Kreuz (×) oder ein Punkt (.).

Das Resultat der Multiplication heißt **Product**, die beiden Zahlen, die multiplicirt werden sollen, heißen **Multiplicand** und **Multiplicator**; beide heißen auch **Factoren**.

Der **Multiplicand** ist diejenige Zahl, welche **multiplicirt** werden soll, **Multiplicator** jene, mit der man multipliciren soll.

$$5 \,.\, 3 = 5 + 5 + 5.$$

Der **gleiche Summand** wird durch diese Vereinfachung des Multiplicirens **zum Multiplicanden**, die **Anzahl der gleichen Summanden zum Multiplicator** und das **Resultat zum Product**.

Factoren

Multiplicand Multiplicator

$$7 \times 4 = 28$$

formelles wirkliches

Product.

**Anm. 1.**

$$8 \times 1 = 8$$
$$8 \times 0 = 0$$
$$12 \times 0 \times 6 = 0 \times 6 = 0$$

**Anm. 2.**

$$7 \times 4 = 4 \times 7 = 28$$

d. h. in jedem formellen Producte lassen sich die Factoren beliebig vertauschen.

Beispiel über die Multiplication.

**1. Art.**

| | | |
|---|---|---|
| 8 0 7 9 3 2 | Multiplicand | Faktoren |
| 5 7 0 0 2 3 | Multiplicator | |
| 2 4 2 3 7 9 6 | | Teilproducte |
| 1 6 1 5 8 6 4 . | | |
| 5 6 5 5 5 2 4 . . . . | | |
| 4 0 3 9 6 6 0 . . . . . | | |
| 4 6 0 5 3 9 8 2 2 4 3 6 | Hauptproduct | |

**2. Art.**

| | | |
|---|---|---|
| 8 0 7 9 3 2 | Multiplicand | Factoren |
| 5 7 0 0 2 3 | Multiplicator | |
| 4 0 3 9 6 6 0 | | Teilprodukte |
| 5 6 5 5 5 2 4 | | |
| 1 6 1 5 8 6 4 | | |
| 2 4 2 3 7 9 6 | | |
| 4 6 0 5 3 9 8 2 2 4 3 6 | Hauptproduct. | |

**Einige Vorteile bei der Multiplication.**

1) Multiplication mit einer Zahl, welche eine Eins
   a) in der Einerstelle
   b) in der höchsten Stelle hat.

In diesen beiden Fällen erspart man das nochmalige Niederschreiben der Ziffern des Multiplicanden.

a)

```
   8 2 5 4 6 2 × 8 3 1
 2 4 7 6 3 8 6
6 6 0 3 6 9 6
6 8 5 9 5 8 9 2 2
```

b) 
```
   925436  × 183
   7403488
    2776308
 169354788
```

2) Mit den nicht über 15 hinausliegenden zweistelligen Zahlen multiplicire man wie mit einstelligen.

z. B. 
```
 14806 × 12
 177672
```

3) Die Multiplication mit einer zwei- und dreizifferigen Zahl läßt sich unter Ersparung von Ziffern ausführen, wenn man eine solche Zahl in Factoren zerlegen kann.

z. B. 
```
   325459 × 72 (= 9 × 8)
          × 9
  2929131
          × 8
 23433048
```

4) Mit 10, 100, 1000 u. s. w. multiplicirt man, indem man dem Multiplicanden ebenso viel Nullen anfügt, als deren der Multiplicator enthält.

z. B. 1752 × 1000 = 1752000

5) Ist eine Multiplication mit 25 oder 125 auszuführen, so wird man mit 100 oder mit 1000 multipliciren und das Product durch 4 oder 8 dividiren, weil man den Multiplicator 4 mal oder 8 mal so groß genommen hat als er ist.

z. B. 168 × 25 = 16800 : 4 = 4200
1296 × 125 = 1296000 : 8 = 162000.

6) Besteht der Multiplicator aus einer Zahl, welche den Zahlen 100, 1000, 10000 u. s. w. nahe liegt, so multiplicire man mit diesen Zahlen und subtrahire das Product aus dem Multiplicanden und der fehlenden Zahl.

```
854325 × 998 = 854325 × 1000 = 854325000
             − 854325 × 2      −1708650
                               852616350
```

7) Multiplication mit 11.

a) eine zweistellige Zahl multiplicirt man mit 11, indem man die Summe der beiden Stellen in die Mitte setzt.

z. B. 34 × 11 = 374
64 × 11 = 704

b) Größere Zahlen multiplicirt man mit 11 dadurch, daß man die erste Stelle des Multiplicanden als erste Stelle des Products hinstellt, dann addirt man 1. und 2. Stelle
2. und 3. „
3. und 4. „
u. s. w., endlich fügt man die letzte Stelle des Multiplicanden als letzte Stelle im Product an letzteres an.

| | |
|---|---|
| | Einer |
| 4 6 3 8 7 | Zehner + Einer |
| 4 6 3 8 7 | Hunderter + Zehner |
| | Tausender + Hunderter |
| z. B. 46387 × 11 = 5 1 0 2 5 7 | Zehntausender + Tausender |
| | Zehntausender |

Ein verkürzter Ausdruck der Multiplication ist das Potenziren.

Unter einer Potenz versteht man ein Product aus lauter gleichen Factoren. z. B. $5^3 = 5 . 5 . 5 = 125$

$7^4 = 7 . 7 . 7 . 7 = 2401$

In der Potenz $7^4$ (gesprochen 7 zur 4. Potenz oder 7 hoch $^4$) heißt 7 die Grundzahl (Basis), 4 der Exponent.

Die Grundzahl oder Basis ist jene Zahl, welche mit sich selbst multiplicirt werden soll.

Der Exponent ist jene Zahl, welche angibt, wie oft die Grundzahl mit sich selbst multiplicirt werden soll.

Anm. Basis und Exponent lassen sich nicht miteinander vertauschen.

$7^4 = 2401$

$4^7 = 16384$

## 4. Division.

Zwei Zahlen dividiren heißt eine dritte neue Zahl suchen, welche mit der zweiten multiplicirt die erste als Product gibt.

Das Zeichen der Division ist ein Doppelpunkt (:) oder ein Bruchstrich (—).

Diejenige Zahl, welche dividirt werden soll, heißt Dividend und diejenige Zahl, mit der dividirt werden soll, heißt Divisor.

Das Resultat der Division heißt Quotient.

Die Division ist eigentlich eine wiederholte oder verkürzte Subtraction.

28 : 4 = 7

28 — 4 — 4 — 4 — 4 — 4 — 4 — 4 = 0

Dividend Divisor Quotient

28 : 4 = 7

formeller wirklicher

Quotient.

Divisionsbeispiel.

```
Dividend     Divisor   Quotient
4 2 5 0 6 3 9 4 : 1 8 5 4 = 2 2 9 2 6
3 7 0 8 . . .
  5 4 2 6
  3 7 0 8
  1 7 1 8 3
  1 6 6 8 6
      4 9 7 9
      3 7 0 8
      1 2 7 1 4
      1 1 1 2 4
      1 5 9 0 Rest
```

Anm. Das gewöhnliche Verfahren beim Dividiren ist, das Product aus der Multiplication des Quotienten mit dem Divisor unter die betreffenden Stellen des Dividenden zu setzen, um dann von diesem jenes zu subtrahiren; dieses Untersetzen ist jedoch nach einiger Uebung leicht zu beseitigen, so daß nur der jedesmalige Rest niedergeschrieben wird.

Hiebei wende man das Seite 3 angegebene Subtractionsverfahren an z. B.

1) Gewöhnliches Verfahren

```
8 3 8 1 1 2 0 5 : 6 7 8 9 = 1 2 3 4 5
6 7 8 9
-------
1 5 9 2 1
1 3 5 7 8
---------
  2 3 4 3 2
  2 0 3 6 7
  ---------
    3 0 6 5 0
    2 7 1 5 6
    ---------
      3 4 9 4 5
      3 4 9 4 5
      ---------
```

2) Kürzeres Verfahren.

```
8 3 8 1 1 2 0 5 : 6 7 8 9 = 1 2 3 4 5
1 5 9 2 1
  2 3 4 3 2
    3 0 6 5 0
      3 4 9 4 5
            0
```

## Probe der Multiplication und Division.

Die Probe der Multiplication ist die Division.

Der hiefür geltende Lehrsatz lautet:

Product dividirt durch den Multiplicanden gibt den Multiplicator, und Product dividirt durch den Multiplicator gibt den Multiplicanden oder kurz: Product dividirt durch den einen Factor gibt den andern Factor z. B.

Multiplicand Multiplicator Product

$$120 \times 30 = 3600$$

1) a) $$\frac{\text{Product}}{\text{Multiplicator}} = \text{Multiplicand}$$

$$\frac{3600}{30} = 120$$

b) $$\frac{\text{Product}}{\text{Multiplicand}} = \text{Multiplicator}$$

$$\frac{3600}{120} = 30$$

2) $$\frac{\text{Product}}{\text{der eine Factor}} = \text{der andere Factor}$$

Die Probe der Division ist die Multiplication.

Die Regel lautet:

Divisor $\times$ Quotient $=$ Dividend.

z. B. Dividend Divisor Quotient
28 : 4 = 7

Probe Divisor $\times$ Quotient = Dividend
4 $\times$ 7 = 28

Bleibt bei der Division ein Rest, so lautet die Regel:

Divisor $\times$ Quotient + Differenz = Dividend.

| | Dividend | | Divisor | | Quotient | Rest |
|---|---|---|---|---|---|---|
| z. B. | 51 | : | 12 | = | 4 | 3 |

Probe Divisor $\times$ Quotient + Differenz = Dividend
12 $\times$ 4 + 3 = 51

## 5. Addition und Subtraction.

Sind mehrere Zahlen teils durch Addition teils durch Subtraction (also teils durch das plus-, teils durch das minus-Zeichen mit einander verbunden, so heißt ein derartiger Ausdruck **Aggregat** (algebraische Summe).

Die durch (+) und (—) verbundenen Zahlen heißen **Glieder des Aggregates**, und zwar diejenigen, vor denen plus (+) oder gar kein Zeichen steht, **positive**, diejenigen, vor denen (—) minus steht, **negative Glieder**, wobei zu bemerken ist, daß man das Aggregat, wo möglich, mit einem positiven Gliede beginnt.

z. B. 20 — 8 + 17 — 21 heißt ein Aggregat
20 u. 17 sind die positiven
8 u. 21 „ die negativen Glieder des Aggregates.

**Der Wert eines Aggregates wird ermittelt, wenn man von der Summe der positiven Glieder die Summe der negativen Glieder subtrahirt.**

z. B.
$$128 - 79 + 6 - 34 + 15$$
$$= (128 + 6 + 15) - (79 + 34)$$
$$= 149 - 113$$
$$= 36.$$

Anm. Um Zahlen als zusammengehörig zu bezeichnen, werden sie häufig in **Klammern** eingeschlossen und zwar in kleinere runde ( ), um einfache Verbindungen, in eckige [ ], um zusammengesetzte, bereits in kleineren Klammern stehende Verbindungen auszudrücken.

Wenn vor einer Klammer das Zeichen plus (+) steht oder gedacht werden muß, so kann diese Klammer weggelassen werden (falls nicht das Aggregat multiplicirt oder dividirt werden soll).

z. B.
$$[30 + (24 - 14)] + [(18 - 10) - 8]$$
$$= 30 + (24 - 14) + (18 - 10) - 8$$
$$= 30 + 24 - 14 + 18 - 10 - 8$$
$$= 30 + 24 + 18 - 14 - 10 - 8$$
$$= 72 - 14 - 10 - 8$$
$$= 72 - 32 = 40$$

Ein Aggregat muß in Klammern stehen, wenn es subtrahirt werden soll. Eine solche Klammer mit dem Minuszeichen vor ihr kann weggelassen werden, wenn man ihre einzelnen Glieder mit entgegengesetzten Zeichen und zwar in beliebiger Ordnung neben einander schreibt.

z. B. $132 - (85 - 49 + 26)$
$= 132 - 85 + 49 - 26$
$= 132 + 49 - 85 - 26$
$= 181 - 111 = 70$

Bei der Auflösung von Klammern hat man demnach folgende zwei Sätze zu beachten:

1) Steht vor einer Klammer das Zeichen (+), so kommen alle Glieder mit unverändertem Vorzeichen aus der Klammer;

2) steht vor einer Klammer das Zeichen (—), so kommen alle Glieder mit verändertem oder entgegengesetztem Vorzeichen aus der Klammer.

3) Wenn in einem Ausdrucke größere und kleinere Klammern vorhanden sind, so wird derselbe ausgerechnet, wenn man entweder

a) die Klammern unmittelbar ausrechnet und zwar die innersten zuerst; (dies Verfahren nennt man „Ausrechnung" oder „Auswertung"), oder

b) die Klammern allmählich wegläßt. In diesem Falle thut man am besten, wenn man mit den äußern Klammern beginnt. Das Verfahren heißt „Auflösung".

z. B. $190 - [54 + (87 - 72) - (29 + 18 - 34)]$

a) durch Auswertung.
$= 190 - [54 + 15 - 13]$
$= 190 - 56 = 134.$

b) durch Auflösung.
$= 190 - 54 - (87 - 72) + (29 + 18 - 34)$
$= 190 - 54 - 87 + 72 + 29 + 18 - 34$
$= 190 + 72 + 29 + 18 - 54 - 87 - 34$
$= 309 - 175 = 134.$

## 6. Multiplication und Division.

Wenn ein Ausdruck blos Factoren, Dividenden und Divisoren enthält, ohne daß in demselben Klammern vorkommen, so werden die Glieder der Reihe nach berechnet.

z. B. $3456 : 16 . 5 . 7 : 9 : 6$
$= 216 . 5 . 7 : 9 : 6$
$= 1080 . 7 : 9 : 6$
$= 7560 : 9 : 6$
$= 840 : 6$
$= 140 .$

Die Reihenfolge der Glieder eines derartigen Ausdruckes ist beliebig. Durch Versetzung der Glieder verschafft man sich in vielen Fällen Rechnungsvorteile.

$3456 : 16 : 9 : 6 . 5 . 7$
$= 216 : 9 : 6 . 5 . 7$
$= 24 : 6 . 5 . 7$
$= 4 . 5 . 7$
$= 20 . 7$
$= 140 .$

Da man demnach zuerst alle Multiplicationen, zuletzt alle Divisionen vornehmen kann, so wird man das gleiche Resultat erhalten, wenn man das Product der Factoren durch das der Divisoren dividirt.

$$3456 : 16 . 5 . 7 : 9 : 6$$
$$= (3456 . 5 . 7) : (16 . 9 . 6)$$
$$= 120960 : 864 = 140 .$$

## 7. Die vier Grundrechnungsarten (Species) in Verbindung.

Wenn in einem Ausdrucke die vier species gemeinsam vorkommen, so sind folgende Regeln zu beachten:

1) Wenn eine Summe oder Differenz entweder Factor oder Dividend oder Divisor werden soll, so hat man eine solche Summe oder Differenz einzuklammern.

z. B. a) $(5 + 8) . 13 = 169$

b) $9 . (6 + 5) = 99$

c) $(19 - 7) . 6 = 72$

d) $15 . (23 - 17) = 90$

e) $(24 + 15) : 13 = 3$

f) $156 : (5 + 7) = 13$

g) $(141 - 51) : 18$
$= 90 : 18 = 5$

h) $81 : (63 - 36)$
$= 81 : 27 = 3$

Die vier letzten Beispiele lassen sich bei Anwendung des sogenannten Bruchstriches auch ohne Klammern schreiben, indem man den Dividend über den Strich, den Divisor unter denselben setzt.

e) $$\frac{24 + 15}{13} = 3$$

f) $$\frac{156}{5 + 7} = 13$$

g) $$\frac{141 - 51}{18} = 5$$

h) $$\frac{81}{63 - 36} = 3$$

2) Ist ein Product oder Quotient Glied eines Aggregates, so kann man die Klammern entbehren

z. B. a) $9 + 5 . 8 = 49$

b) $63 : 7 + 8 = 17$

c) $14 + \frac{156}{12} = 27$

d) 12 . 17 — 134<br>
= 204 — 134 = 70

e) 85 — 72 : 9 = 77

f) $\frac{343}{49} - 5 = 2$

3) Nennt man die beiden ersten Grundrechnungsarten Addition und Subtraction *Ausdrücke der ersten Art*, die beiden folgenden Species, Multiplication und Division, *Ausdrücke der zweiten Art*, so ergibt sich folgende Regel:

Alles, was in einer Klammer steht, ist als *zusammengehörig* zu betrachten und zunächst auszurechnen; im übrigen geht die Ausrechnung der Operationen *zweiter Art* jener der Operationen *erster Art* vor.

Dies gilt besonders für die Berechnung der Ausdrücke durch *Auswertung*, welche auch bei bestimmten Zahlen die gewöhnliche ist.

Für die Berechnung durch *Auflösung* gilt noch die Regel:

Ein *Aggregat* wird mit einer Zahl multiplicirt und dividirt, indem man *jedes Glied* mit der Zahl multiplicirt oder dividirt.

Dies Verfahren jedoch ist in manchen Fällen ganz unpraktisch.

1) *Berechnung durch Auswertung.*

z. B. [(8986 — 17 . 139) : 37 — (9523 : (31 . 47 — 1368) + 6931 : 29) + 9310] : (4620 — 19 . 241) + 77<br>
= [(8986 — 2363) : 37 — (9523 : (1457 — 1368) + 239) + 9310] : (4620 — 4579) + 77<br>
= [6623 : 37 — (9523 : 89 + 239) + 9310] : 41 + 77<br>
= [179 — (107 + 239) + 9310] : 41 + 77<br>
= [179 — 346 + 9310] : 41 + 77<br>
= [9489 — 346] : 41 + 77<br>
= 9143 : 41 + 77<br>
= 223 + 77<br>
= 300

oder

17 . 139 = 2363<br>
8896 — 2363 = 6623<br>
6623 : 37 = 179<br>
31 . 47 = 1457<br>
1457 — 1368 = 89<br>
9523 : 89 = 107<br>
6931 : 29 = 239<br>
107 + 239 = 346<br>
179 + 9310 = 9489<br>
9489 — 346 = 9143<br>
19 . 241 = 4579<br>
4620 — 4579 = 41<br>
9143 × 41 = 223<br>
223 + 77 = **300**

2) *Berechnung durch Auflösung.*

Hier müssen noch einzelne Regeln aus der Algebra vorausgeschickt werden.

a) Eine *positive* Zahl mit einer *positiven* oder eine negative mit einer negativen multiplicirt, gibt ein *positives Product*, dagegen

eine positive mit einer negativen oder eine negative mit einer positiven Zahl gibt ein negatives Product.

(Mechanische Regel: signa eadem dant plus, gleiche Zeichen geben plus, signa diversa minus, ungleiche minus).

z. B. $(+3) \cdot (+4) = +12$

$(-3) \cdot (-4) = +12$

$(+3) \cdot (-4) = -12$

$(-3) \cdot (+4) = -12$

b) Eine positive Zahl durch eine positive oder eine negative durch eine negative gibt einen positiven Quotienten, eine positive Zahl dividirt durch eine negative oder eine negative durch eine positive Zahl gibt einen negativen Quotienten.

z. B. $(+12) : (+3) = +4$

$(-12) : (-3) = +4$

$(+12) : (-3) = -4$

$(-12) : (+3) = -4$

Beispiel:

$48 - [8 : 8 - (12 - 20 : 4) + 16]$

$= 48 - 8 : 8 + (12 - 20 : 4) - 16$

$= 48 - 1 + 12 - 20 : 4 - 16$

$= 48 - 1 + 12 - 5 - 16$

$= 47 + 12 - 5 - 16$

$= 59 - 5 - 16$

$= 54 - 16$

$= 38.$

## III. Die vier Species mit benannten ganzen Zahlen.

Um benannte Zahlen vergleichen und verbinden zu können, muß man das Maß kennen, von dem ihre Benennung abgeleitet ist. Dieses Maß bezieht sich

1) auf die bloße Anzahl der Dinge (Stückmaß) z. B. Stück rc.

2) auf die räumliche Ausdehnung und zwar

a) auf die Länge (Längenmaß) Meter, Meilen rc.

b) auf die Fläche (Flächenmaß) z. B. Quadratmeter rc.

c) auf den körperlichen Inhalt (Körpermaß) z. B. Cubikmeter, Stère, Liter rc.

3) auf die Zeit z. B. Jahr, Monat, Tag, Stunde, Minuten, Sekunden.

4) auf das Gewicht z. B. Zollztr., Kilogramm rc.

5) auf den Preis (Wertmaß) z. B. Mark, Francs.

6) auf den Winkel (Winkelmaß) z. B. Grad, Minuten, Secunden.

Weitere Ausführung des Maßes und Gewichtes siehe Anhang des Lehrbuches.

Zusammengehörige höhere und niedere Mehreinheiten werden gleichartig, nicht zusammengehörige ungleichartig genannt.

## 1. Resolviren und Reduciren.

a) Resolviren heißt Einheiten der höheren Sorte in Einheiten der niedern Sorte verwandeln (auflösen). z. B. Mark in Pfennig. Dies geschieht durch die Multiplication der höheren Sorte mit der sogenannten Reductionszahl.

Unter Reductionszahl versteht man jene Zahl, welche angibt, wie viel Einheiten einer niedern Ordnung eine Einheit einer höhern Ordnung ausmachen.

b) Reduciren heißt Einheiten einer niedern Ordnung in Einheiten der höhern Ordnung umwandeln (zurückführen) z. B. Pfennig in Mark.

Das Reduciren geschieht durch die Division der niedern Sorte durch die Reductionszahl.

a) Resolviren:

1) Beispiel. ? Pfennig sind 5 Mark 16 Pfennig.
5 × 100 + 16 = 516 Pfennig.

2) 3 Ballen 5 Rieß 2 Buch 6 Bogen Schreibpapier ? Bogen.
((3 × 10 + 5) . 20 + 2) . 24 + 6
= (35 . 20 + 2) . 24 + 6
= 702 . 24 + 6
= 16848 + 6 = 16854 Bogen.

b) Reduciren:

1) 8315 Pf. ? Mark
= 8315 : 100 = 83 Mark 15 Pf.

2) 3114 Sekunden ? Stunden &c.
311(4 Sek. : 6(0 = 51 Minuten 54 Sek. Rest
= 51 Minuten 54 Sekunden.

3) 7239 Centimes ? Francs
7239 : 100 = 72 Francs 39 Centimes.

## 2. Addition mit benannten ganzen Zahlen.

(siehe Aufgabensammlung.)

## 3. Subtraction mit benannten Zahlen.

(siehe Aufgabensammlung.)

## 4. Addition und Subtraction mit benannten Zahlen.

(siehe Aufgabensammlung.)

Hieher gehören auch die sogenannten Zeitrechnungen.

Die Zeitangaben lassen sich betrachten:
1) als Anfang,
2) als Dauer und
3) als Ende einer Begebenheit.

1. Jemand ist geboren den 31. August 1810 Morgens 7 Uhr und erreichte ein Alter von 47 Jahren, 6 Monaten, 18 Tagen und 20 Stunden; welches ist sein Todestag?

| Jahre. | Monate. | Tage. | Stunden. |
|---|---|---|---|
| 1809 | 7 | 30 | 7 |
| 47 | 6 | 18 | 20 |
| 1857 | 2 | 19 | 3 |

Antw. Im Jahre 1858 am 20. März um 3 Uhr Morgens starb er.

### 5. Multiplication mit benannten Zahlen.

(siehe Aufgabensammlung.)

### 6. Division mit benannten Zahlen.

(siehe Aufgabensammlung.)

### 7. Multiplication und Division mit benannten Zahlen.

(siehe Aufgabensammlung.)

### 8. Die vier Species mit benannten Zahlen in Verbindung.

(siehe Aufgabensammlung.)

Eigens zu erwähnen sind die Durchschnittsberechnungen.

Den Durchschnitt zweier oder mehrerer Zahlen (die Durchschnittszahl, das arithmetische Mittel) findet man, wenn man die Summe der Angaben durch ihre Zahl dividirt.

z. B.

1) das arithmetische Mittel der Zahlen 9, 8, 7, 4, 5, 3?

$$\frac{9 + 8 + 7 + 4 + 5 + 3}{6} = \mathbf{6}.$$

2) Der niedrigste Preis des Zentner Weizens beträgt 8 fl. 50 Nkr. öst. W., der höchste 9 fl. 40 Nkr. öst. W. Welches ist der Durchschnittspreis?

$$= \frac{8 \text{ fl. } 50 \text{ Nkr. } + 9 \text{ fl. } 40 \text{ Nkr.}}{2}$$

$$= \frac{17 \text{ fl. } 90 \text{ Nkr.}}{2} = 8 \text{ fl. } 95 \text{ Nkr. öst. W.}$$

## IV. Teilbarkeit der Zahlen.

### 1. Erklärungen.

Eine ganze Zahl heißt durch eine andere teilbar, wenn die letztere in der ersten ohne Rest enthalten ist, die Division also eine ganze Zahl als Quotienten gibt.

Eine ganze Zahl, welche in einer andern ohne Rest enthalten ist, heißt ein Teiler oder ein Maß dieser Zahl.

Eine ganze Zahl, in welcher eine andere ohne Rest enthalten ist, wird ein Vielfaches (Dividuus) dieser Zahl genannt.

Jede Zahl hat 1 und sich selbst zum Maße, d. h. jede Zahl ist durch 1 und durch sich selbst teilbar.

Die Zahlen welche nur 1 und sich selbst zum Maße haben, heißen absolute Primzahlen (Primzahlen an und für sich) z. B. 1, 3, 5, 7, 19 2c.

Im Gegensatze zu diesen werden die Zahlen, welche auch andere Zahlen zum Maße haben, zusammengesetzte Zahlen genannt z. B. 4, 6, 8, 9, 16, 24.

Die einfachen Factoren, in welche jede zusammengesetzte Zahl zerlegt werden kann, heißen Primfactoren.

Je zwei ganze Zahlen haben immer 1 zum gemeinschaftlichen Maße.

Zwei oder mehrere Zahlen, welche nur 1 zum gemeinschaftlichen Maße haben, werden relative Primzahlen (Primzahlen unter sich) genannt.

z. B. 7 u. 18; 6, 17 u. 49.

Anm. Zwei aufeinanderfolgende Zahlen sind immer Primzahlen unter sich z. B. 6 u. 7, 10 u. 11, 17 u. 18, 15 u. 16

## 2. Kennzeichen der Teilbarkeit.

1) Eine Zahl ist durch 2, 4, 8, 16 2c. teilbar, wenn ihre eine zwei, drei, vier letzten Stellen als Zähler für sich betrachtet, beziehungsweise Vielfache von 2, 4, 8, 16 2c. sind.

Es ist z. B. 34 durch 2 teilbar, weil 4 durch 2 teilbar ist; 348 durch 4, weil 48 : 4 = 12 ist; 3488 durch 8, weil 488 ein Vielfaches von 8 ist; 32576 durch 16, weil 2576 ein Vielfaches von 16 ist (2576 : 16 = 161).

2) Eine Zahl ist durch 3 oder 9 teilbar, wenn die Quersumme ihrer Ziffern ein Vielfaches von 3 oder 9 ist.

z. B. 285 durch 3 teilbar, weil $(2 + 8 + 5) : 3 = 15 : 3 = 5$ ist. 70425 ist durch 9 teilbar, weil $(7 + 0 + 4 + 2 + 5) : 9 = 18 : 9 = 2$ ist.

3) Eine Zahl ist durch 5, 25, 125 u. s. w. teilbar, wenn bezüglich ihre ein, zwei, drei 2c. letzten Stellen als Zahlen für sich betrachtet, ein Vielfaches von 5, 25, 125 u. s. w. sind.

z. B. 105 ist durch 5 theilbar 5 : 5 = 1.
30875 ist durch 25 teilbar, weil 75 : 25 = 3.
90625 ist durch 125 teilbar, weil 625 : 125 = 5.

4) Eine Zahl ist durch 10, 100, 1000 u. s. w. teilbar, wenn ihre ein, zwei, drei u. s. w. letzten Stellen aus 0 bestehen.

5) Eine Zahl ist durch 11 teilbar, wenn die Differenz aus der Summe ihre ungeraden Stellen und aus der Summe ihrer geraden Stellen entweder 0 oder 11 oder ein Vielfaches von 11 ist.

z. B. 92543 ist durch 11 teilbar, denn $(9 + 5 + 3) - (2 + 4) = 17 - 6 = 11$.

705958 ist durch 11 teilbar, denn $(7 + 5 + 5) - (0 + 9 + 8) = 17 - 17 = 0$.

6) Eine Zahl ist durch 6 teilbar, wenn sie sowol durch 2, als auch durch 3 teilbar ist; sie ist durch 15 teilbar, wenn sie sowohl durch 3 als durch 5 teilbar ist.

### 3. Zerlegung in Primfactoren.

Soll eine zusammengesetzte Zahl in Primfactoren zerlegt werden, so dividirt man zunächst mit der kleinsten Primzahl, die zugleich Teiler ist, in die gegebene Zahl, den so gefundenen Quotienten dividirt man abermals durch seinen kleinsten Primtheiler und fährt so fort, bis sich der letzte Quotient als eine Primzahl ergibt.

Die so gefundenen Primteiler sind die Primfactoren der gegebenen zusammengesetzten Zahl. z. B.

$$\begin{aligned} 4620 &: 2 = 2310 \\ 2310 &: 2 = 1155 \\ 1155 &: 3 = 385 \\ 385 &: 5 = 77 \\ 77 &: 7 = 11 \\ 11 &: 11 = 1 \end{aligned}$$

$$4620 = 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, 11$$

oder

$$\begin{aligned} 4620 &= 2 \,.\, 2310 \\ &= 2 \,.\, 2 \,.\, 1155 \\ &= 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 385 \\ &= 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 77 \\ &= 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, 11. \end{aligned}$$

Viele Zahlen geben bei ihrer Zerlegung nur gleiche Primfactoren

z. B. $64 = 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2$

$2401 = 7 \,.\, 7 \,.\, 7 \,.\, 7$.

Solche aus gleichen Fatoren bestehende Producte nennt man, wie schon früher bemerkt, Potenzen; der gleiche Factor heißt Grundzahl (Basis) und die Anzahl der gleichen Faktoren heißt Exponent.

$3 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 3 = 3^4$ (ausgesprochen 3 hoch 4 oder 3 in der 4. Potenz).

In der Potenz $3^4$ ist 3 die Grundzahl (Basis), 4 der Exponent.

Wenn zusammengesetzte Zahlen aus gleichen und ungleichen Primfactoren bestehen, so schreibt man die gleichen Factoren gewöhnlich als Potenzen.

z. B.

$$\begin{aligned} 14850 &: 2 = 7425 \\ 7425 &: 3 = 2475 \\ 2475 &: 3 = 825 \\ 825 &: 5 = 165 \\ 165 &: 5 = 33 \\ 33 &: 3 = 11 \\ 11 &: 11 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 14850 &= 2 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 5 \,.\, 11 \\ &= 2 \,.\, 3^3 \,.\, 5^2 \,.\, 11. \end{aligned}$$

## 4. Der grösste gemeinschaftliche Teiler oder Divisor.

Unter dem größten gemeinschaftlichen Teiler oder Divisor zweier oder mehrerer Zahlen versteht man jene **größte** Zahl, welche in den gegebenen Zahlen ohne Rest enthalten ist.

Dieser größte gemeinschaftliche Teiler oder Divisor kann auf dreierlei Art gefunden werden:

a) durch Zerfällung in ihre Primfactoren,

b) durch Division,

c) durch eine Vereinigung beider Verfahrungsweisen.

1) Der größte gemeinschaftliche Teiler oder Divisor für zwei oder mehrere Zahlen wird gefunden, wenn man die Zahl in ihre Primfactoren zerlegt.

Das Product der gemeinschaftlichen Primfactoren ist der größte gemeinschaftliche Teiler (Divisor) oder das größte gemeinschaftliche Maß.

Welches ist der größte gemeinschaftliche Teiler oder Divisor der beiden Zahlen 816 u. 912?

| | |
|---|---|
| 816 : 2 = 408 | 912 : 2 = 456 |
| 408 : 2 = 204 | 456 : 2 = 228 |
| 204 : 2 = 102 | 228 : 2 = 114 |
| 102 : 2 = 51 | 114 : 2 = 57 |
| 51 : 3 = 17 | 57 : 3 = 19 |
| 17 : 17 = 1 | 19 : 19 = 1 |
| 816 = 2 . 2 . 2 . 2 . 3 . 17 | 912 = 2 . 2 . 2 . 2 . 3 . 19 |

oder

| | |
|---|---|
| 816 = 2 . 408 | 912 = 2 . 456 |
| = 2 . 2 . 204 | = 2 . 2 . 228 |
| = 2 . 2 . 2 . 102 | = 2 . 2 . 2 . 114 |
| = 2 . 2 . 2 . 2 . 51 | = 2 . 2 . 2 . 2 . 57 |
| = 2 . 2 . 2 . 2 . 3 . 17 | = 2 . 2 . 2 . 2 . 3 . 19 |

Beide Zahlen 816 und 912 haben folgende Primfactoren gemeinschaftlich:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 48$$

**48** ist also der größte gemeinschaftliche Teiler oder Divisor der beiden Zahlen 816 und 912.

Welches ist der größte gemeinschaftliche Teiler (Divisor) der Zahlen 360, 240, 540, 600?

1. Art.

| | |
|---|---|
| 360 : 2 = 180 | 240 : 2 = 120 |
| 180 : 2 = 90 | 120 : 2 = 60 |
| 90 : 2 = 45 | 60 : 2 = 30 |
| 45 : 3 = 15 | 30 : 2 = 15 |
| 15 : 3 = 5 | 15 : 3 = 5 |
| 5 : 5 = 1 | 5 : 5 = 1 |
| $360 = 2 . 2 . 2 . 3 . 3 . 5$ | $240 = 2 . 2 . 2 . 2 . 3 . 5$ |
| $= 2^3 . 3^2 . 5$ | $= 2^4 . 3 . 5$ |
| 540 : 2 = 270 | 600 : 2 = 300 |
| 270 : 2 = 135 | 300 : 2 = 150 |
| 135 : 3 = 45 | 150 : 2 = 75 |
| 45 : 3 = 15 | 75 : 3 = 25 |
| 15 : 3 = 5 | 25 : 5 = 5 |
| 5 : 5 = 1 | 5 : 5 = 1 |
| $540 = 2 . 2 . 3 . 3 . 3 . 5$ | $600 = 2 . 2 . 2 . 3 . 5 . 5$ |
| $= 2^2 . 3^3 . 5$ | $= 2^3 . 3 . 5^2$ |

Die Zahlen haben folgende Primfactoren gemeinschaftlich:

$$2^2 . 3 . 5 = 2 . 2 . 3 . 5 = 60$$

Anm. Der größte gemeinschaftliche Teiler oder Divisor ist das Product der niedrigsten Potenzen der gemeinschaftlichen Zahlen.

2. Art. Durch Division.

Um den größten gemeinschaftlichen Teiler (Divisor) zweier Zahlen zu finden, dividirt man die größere Zahl durch die kleinere und dann den Divisor durch den jedesmaligen Rest. Der letzte Divisor ist alsdann der größte gemeinschaftliche Teiler der Zahlen.

Bleibt 1 als Rest, so sind die Zahlen Primzahlen unter sich, d. h. die Zahlen haben keinen gemeinschaftlichen Divisor.

z. B. Welches ist der größte gemeinschaftliche Teiler der Zahlen 816 und 912?

912 : 816 = 1
816
―――
816 : 96 = 8
768
―――
96 : 48 = 2
96
―――
\- -

Der größte gemeinschaftliche Teiler der Zahlen 816 u. 912 ist **48.**

Soll zu mehr als zu zwei Zahlen der größte gemeinschaftliche Teiler gesucht werden, so sucht man denselben zunächst von irgend zwei der gegebenen Zahlen, hierauf von dem eben gefundenen Teiler und einer dritten Zahl u. s. w. bis zur letzten der gegebenen Zahlen. Der zu-

letzt gefundene Divisor ist dann der größte gemeinschaftliche Teiler für sämmtliche Zahlen.

z. B. Welches ist der größte gemeinschaftliche Teiler für die Zahlen 360, 240, 540, 600?*)

$$\begin{array}{ll} 360 : 240 = & 540 : 120 = 4 \\ 240 : 120 = 2 & 120 : 60 = 2 \\ 0 & 0 \end{array}$$

$$600 : 60 = 10$$

60 ist also der größte gemeinschaftliche Teiler dieser 4 Zahlen.

3. Art. Wenn sich bei kleineren Zahlen die gemeinschaftlichen Factoren sogleich erkennen lassen, so scheidet man diese aus und dividirt durch sie die vorliegenden Zahlen. Sind sämmtliche Quotienten relative Primzahlen, so ist das Product der ausgeschiedenen Factoren der gesuchte größte gemeinschaftliche Teiler. z. B.

| | |
|---|---|
| | 360, 240, 540, 600 |
| 2 | 180, 120, 270, 300 |
| 2 | 90, 60, 135, 150 |
| 3 | 30, 20, 45, 50 |
| 5 | 6, 4, 9, 10 |

2 . 2 . 3 . 5 = 60 ist der größte gemeinschaftliche Teiler.

## 5. Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache.

Unter dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen zweier oder mehrerer Zahlen versteht man jene kleinste Zahl, in welcher alle gegebenen Zahlen ohne Rest enthalten sind.

Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache kann auf folgende Weise gefunden werden.

1. Art. Man zerlege jede der gegebenen Zahlen in ihre Primfactoren und nehme jeden Primfactor so oft als Factor in das gemeinschaftliche Vielfache auf, als er in derjenigen Zahl enthalten ist, in welcher er am öftesten vorkommt.

Die Zahlen, welche in einer andern enthalten sind, streiche man weg.

z. B. Man suche für folgende Zahlen: 5, 8, 15, 24, 30 das kleinste gemeinschaftliche Vielfache.

~~5~~ ~~8~~ ~~15~~ 24 30

24 = 2 . 2 . 2 . 3 — Kleinstes gemeinschaftliches Vielfache

30 = 2 . 3 . 5 — 2 . 2 . 2 . 3 . 5 = 120

2. Art. Auch durch folgende Regel kann das kleinste gemeinschaftliche Vielfache gesucht werden.

*) Bei Ausrechnung dieses Beispieles wurde die abgekürzte Division angewendet.

a) Streiche diejenigen Zahlen weg, welche in anderen ohne Rest enthalten sind.

b) Suche hierauf die gemeinschaftlichen Teiler von zwei oder mehreren übrigen Zahlen heraus, dividire durch dieselben und fahre damit so lange fort, bis die erhaltenen Quotienten und die nicht teilbaren Zahlen relative Primzahlen sind.

c) Multiplicire die herausgestellten gemeinschaftlichen Factoren mit den relativen Primzahlen. Das erhaltene Product ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache.

z. B. 1) 5, 8, 15, 24, 30.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 5, | 8, | 15, | 24, | 30 |
| 2 | | | | 12, | 15 |
| 3 | | | | 4, | 5 |

Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache ist 2 . 3 . 4 . 5 = 120

2) Man suche für folgende Zahlen: 15, 21, 28, 40, 48 das kleinste gemeinschaftliche Vielfache.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 15, | 21, | 28, | 40, | 48 |
| 2 | 15, | 21, | 14, | 20, | 24 |
| 2 | 15, | 21, | 7, | 10, | 12 |
| 2 | 15, | 21, | 7, | 5, | 6 |
| 3 | 5, | 7, | 7, | 5, | 2 |
| | 5, | | 7, | | 2 |

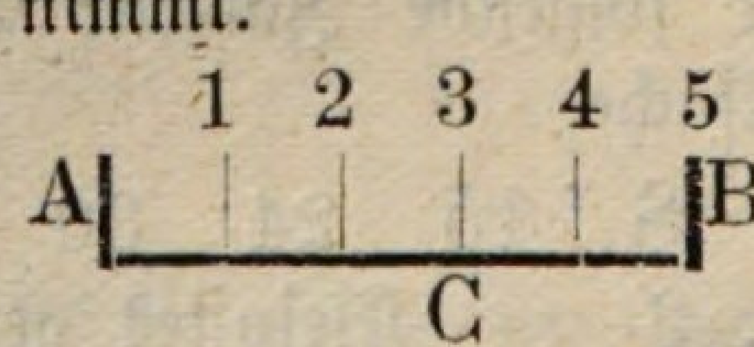
Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache ist = 2 . 2 . 2 . 3 . 5 . 7 . 2 = 1680.

## V. Die gemeinen Brüche.

### 1. Erklärungen.

Ein Bruch entsteht dadurch, daß man irgend ein Ganzes z. B. die Linie A B in eine bestimmte Anzahl gleiche Teile teilt und davon einen oder mehrere nimmt.

z. B. $\frac{3}{5}$ entsteht dadurch, daß man die Einheit in fünf gleiche Teile teilt und 3 davon nimmt.

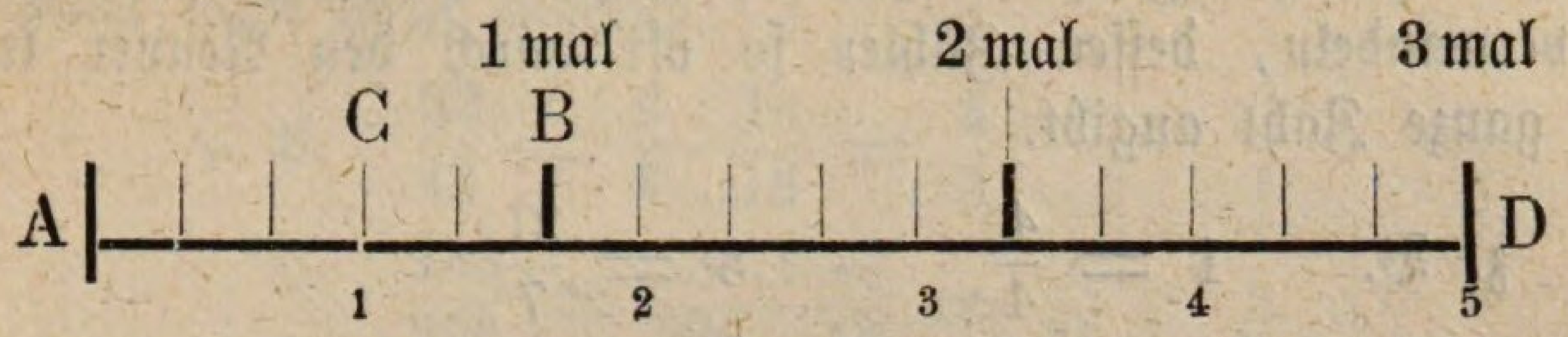



AB = 1

AC = $\frac{3}{5}$

Die Zahl 5 gibt an, in wie viele Teile das Ganze geteilt wurde und heißt der Nenner des Bruches, die Zahl 3 sagt uns, wie viele Teile hievon genommen wurden; sie heißt der Zähler des Bruches.

Nach einer andern Vorstellungsweise können wir auch sagen $\frac{3}{5}$ ist der 5. Teil von 3. Wenn wir nämlich die Länge AB, die Einheit, 3 mal aneinandertragen und jede Einheit in 5 gleiche Teile teilen, so enthält AC 3 und AD 15 gleiche Teile, folglich läßt sich AC auf AD 5 mal auftragen, also ist AC der 5. Teil von AD; nun ist aber AC $= \frac{3}{5}$ und AD $= 3$, somit ist $\frac{3}{5} =$ der 5 Teil von 3 oder 3 : 5.




Man sieht aus dieser zweiten Entstehungsweise, daß ein Bruch nichts anderes sei, als ein formeller Quotient, dessen Dividend der Zähler und dessen Divisor der Nenner ist, und daß deßhalb die Sätze für formelle Quotienten nun auch für Brüche gelten.

Da beim Dividiren der Dividend geteilt oder gebrochen wird, so hat der Quotient auch den Namen gebrochene Zahl oder Bruch.

Der Dividend heißt dann Zähler, weil er die Teile zählt, der Divisor dagegen Nenner, da von ihm die Teile ihre Benennung erhalten. Statt der Divisionspunkte (:) bedient man sich eines von links nach rechts gerichteten Striches (—), über welchen der Zähler und unter den der Nenner geschrieben wird.

Anm. Jeder Bruch gibt also mit seinem Nenner multiplicirt, seinen Zähler z. B. $\frac{5}{8} . 8 = 5$.

Ein Bruch, dessen Zähler größer ist als der Nenner oder größer als 1, heißt ein unechter Bruch. z. B. $\frac{12}{7}$.

Ein Bruch, dessen Zähler kleiner ist als der Nenner oder kleiner als 1, heißt ein echter Bruch. z. B. $\frac{7}{12}$.

Eine ganze Zahl mit einem echten Bruche heißt eine gemischte Zahl z. B. $1\frac{5}{12} = 1 + \frac{5}{12}$.

Jeder unechte Bruch kann in eine gemischte Zahl verwandelt werden.

Die ganze Zahl ist der bei der Division gefundene Quotient.

Der Rest ist ein echter Bruch, welcher den Nenner des unechten Bruches als Nenner hat.

Anm. Das Additionszeichen läßt man bei gemischten Zahlen gewöhnlich weg.

Umgekehrt kann man jede gemischte Zahl in einen unechten Bruch verwandeln, dessen Zähler erhalten wird, wenn man zum Producte aus der ganzen Zahl und dem Nenner des beigefügten Bruches den Zähler des Bruches addirt.

z. B. $$7\frac{3}{4} = \frac{7 . 4 + 3}{4} = \frac{31}{4}$$

$$17\frac{5}{12} = \frac{17 . 12 + 5}{12} = \frac{204 + 5}{12} = \frac{209}{12}$$

Ein Bruch heißt ein uneigentlicher, wenn der Zähler gleich dem Nenner oder ein Vielfaches desselben, der Wert des Bruches also eine ganze Zahl ist.

z. B. $\frac{4}{4} = 1$ $\frac{21}{7} = 3.$

Jede ganze Zahl läßt sich also in einen uneigentlichen Bruch verwandeln, dessen Zähler so oft durch den Nenner teilbar ist, als die ganze Zahl angibt.

z. B. $1 = \frac{4}{4}$ $3 = \frac{21}{7}$

$2 = \frac{6}{3}$ $4 = \frac{24}{6}$

$7 = \frac{63}{9} = \frac{28}{4}$

Anm. Jede Zahl läßt sich als ein Bruch betrachten, dessen Nenner 1 ist.

z. B. $7 = \frac{7}{1}$ $6 = \frac{6}{1}$

Von mehreren Brüchen, welche gleiche Nenner haben, ist derjenige der größte, der den größten Zähler hat.

z. B. von $\frac{1}{7}, \frac{3}{7}, \frac{5}{7}, \frac{9}{7}, \frac{14}{7}$ ist $\frac{14}{7}$ der größte.

Von mehreren Brüchen mit demselben Zähler ist derjenige der größte, welcher den kleinsten Nenner hat.

z. B. von $\frac{5}{3}, \frac{5}{2}, \frac{5}{7}, \frac{5}{12}$ ist $\frac{5}{2}$ der größte Bruch.

Anm. Wann wird der Wert eines Bruches vergrößert, wann verkleinert?

**Ein Bruch bleibt seinem Werte nach unverändert, wenn man Zähler und Nenner mit derselben Zahl**
**a) multiplicirt oder**
**b) dividirt.**

z. B. $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 7} = \frac{21}{28}$

$\frac{5}{7} = \frac{5 \cdot 3}{7 \cdot 3} = \frac{15}{21}$

$\frac{14}{36} = \frac{14 : 2}{36 : 2} = \frac{7}{18}$

$\frac{36}{48} = \frac{36 : 6}{48 : 6} = \frac{6 : 2}{8 : 2} = \frac{3}{4}$

(Anm. Der Beweis bleibt dem Unterrichte vorbehalten.)

Die erste dieser Veränderung heißt Erweiterung, die zweite Verkleinerung (Reducirung) der Brüche.

Wenn Zähler und Nenner eines Bruches einen gemeinschaftlichen Teiler haben, so läßt sich dieser Bruch, ohne seinen Wert zu ändern, auf eine einfachere Form bringen oder vereinfachen, indem man Zähler und Nenner durch den gemeinschaftlichen Teiler dividirt.

Sind Zähler und Nenner relative Primzahlen, so ist eine weitere Vereinfachung nicht mehr möglich.

z. B. $\frac{32}{48} = \frac{2\,.\,16}{3\,.\,16} = \frac{2}{3}$

$\frac{133}{209} = \frac{133 : 19}{209 : 19} = \frac{7}{11}$

Sollen Brüche mit einander verglichen werden, welche verschiedene Nenner haben, so verwandelt man dieselben in Brüche mit gleichen Nennern oder macht dieselben gleichnamig.

Dies wird dadurch bewerkstelligt, daß man zu den Nennern der gegebenen Brüche das kleinste gemeinschaftliche Vielfache sucht, welches der gemeinschaftliche oder Hauptnenner sämmtlicher Brüche wird.

Die hiezu gehörigen Zähler findet man, wenn man den Hauptnenner durch jeden Nenner dividirt und mit diesen Quotienten die Zähler der einzelnen Brüche multiplicirt.

Bei diesem Verfahren geschieht also nichts anderes, als daß Zähler und Nenner mit derselben Zahl multiplicirt werden.

Folgende Brüche sollen auf gleiche Benennung gebracht werden:

$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{10}, \frac{13}{15}, \frac{11}{18}$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 2, | 4, | 10, | 15, | 18 |
| 2 | | 2, | 5, | 15, | 9 |
| 3 | | 2, | | 5, | 3 |
| | | 2, | | 5 | 3 |

2 . 3 . 2 . 5 . 3 = 180 ist der gemeinschaftliche Nenner.

$\frac{1}{2} = \frac{1\,.\,90}{2\,.\,90} = \frac{90}{180}$ $\quad \frac{3}{4} = \frac{3\,.\,45}{4\,.\,45} = \frac{135}{180}$

$\frac{7}{10} = \frac{7\,.\,18}{10\,.\,18} = \frac{126}{180}$ $\quad \frac{13}{15} = \frac{13\,.\,12}{15\,.\,12} = \frac{156}{180}$

$\frac{11}{18} = \frac{11\,.\,10}{18\,.\,10} = \frac{110}{180}$

Sind also die Brüche nach ihrer Größe zu ordnen, so hat man:

$\frac{156}{180} > \frac{135}{180} > \frac{126}{180} > \frac{110}{180} > \frac{90}{180}$

oder $\frac{13}{15} > \frac{3}{4} > \frac{7}{10} > \frac{11}{18} > \frac{1}{2}$

## 2. Addition der Brüche.

a) Brüche mit gleichen Nennern oder gleichnamige Brüche werden addirt, indem man die Summe ihrer Zähler durch den gemeinschaftlichen Nenner dividirt.

z. B. $\frac{4}{9} + \frac{6}{9} + \frac{8}{9} = \frac{4 + 6 + 8}{9} = \frac{18}{9} = 2.$

b) Haben die Brüche verschiedene Nenner, so müssen dieselben zuvor gleichnamig gemacht werden und dann findet die vorhergehende Regel ihre Anwendung. z. B.

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{3}{8} + \frac{7}{12} = \frac{18 + 20 + 9 + 14}{24} = \frac{61}{24} = 2\frac{13}{24}$$

4, 6, 8, 12
8 = 2 . 2 . 2
12 = 2 . 2 . 3

2 . 2 . 2 . 3 = 24 ist der gemeinschaftliche Nenner. (Siehe S. 19 u. 20.)

c) Gemischte Zahlen werden addirt, wenn man zur Summe der ganzen Zahlen die Summe der echten Brüche addirt.

z. B. 1) $9\frac{3}{4} + 12\frac{5}{6} + 8\frac{1}{3} + 15\frac{1}{2} + 1\frac{7}{12}$

$$= 45 + \frac{9 + 10 + 4 + 6 + 7}{12}$$

$$= 45 + \frac{36}{12} = 45 + 3 = 48.$$

2) $4\frac{7}{8} + 2\frac{1}{7} + \frac{5}{12} + \frac{1}{3} + 6\frac{5}{14} + 8\frac{1}{6}$

$$= 20 + \frac{147 + 24 + 70 + 56 + 60 + 28.}{168}$$

$$= 20 + \frac{385}{168} = 20 + 2\frac{49}{168} = 22\frac{7}{24}$$

| | |
|---|---|
| | 8, 7, 12, 3, 14, 6 |
| 2 | 4, 6, 7 |
| 2 | 2, 3, 7 |

General- oder Hauptnenner 2 . 2 . 2 . 3 . 7 = 168

## 3. Subtraction der Brüche.

a) Gleichnamige Brüche werden subtrahirt, wenn man den Zähler des Subtrahenden vom Zähler des Minuenden subtrahirt und die erhaltene Differenz durch den gemeinschaftlichen Nenner dividirt.

$$\frac{12}{17} - \frac{9}{17} = \frac{12 - 9}{17} = \frac{3}{17}$$

b) Ungleichnamige Brüche müssen zuerst gleichnamig gemacht werden und dann findet die Regel Nr. 1 Anwendung.

z. B. $\frac{7}{8} - \frac{5}{6} = \frac{21-20}{24} = \frac{1}{24}$

c) Sind gemischte Zahlen von einander zu subtrahiren, so addirt man zu der Differenz der ganzen Zahlen die Differenz der echten Brüche. z. B.

$$18\frac{4}{5} - 7\frac{3}{8} = 11 + \frac{32-15}{40} = 11 + \frac{17}{40} = 11\frac{17}{40}$$

d) Ist bei gemischten Zahlen der echte Bruch des Minuenden kleiner als der des Subtrahenden, so addirt man zu ersterem eine Einheit des Ganzen. z. B.

$$106\frac{2}{7} - 84\frac{5}{6} = 22 + \frac{12-35}{42} = 21 + \frac{(42+12)-35}{42}$$

$$= 21 + \frac{54-35}{42} = 21\frac{19}{42}$$

e) Ist der Minuend eine ganze Zahl, so nehme man von dem vorhandenen Ganzen des Minuenden eine Einheit und verwandle dieselbe in den dem Subtrahenden gleichnamigen Bruch. z. B.

$$8 - \frac{7}{12} = 7\frac{12}{12} - \frac{7}{12} = 7\frac{5}{12}$$

$$5 - 1\frac{3}{4} = 4\frac{4}{4} - 1\frac{3}{4} = 3\frac{1}{4}.$$

## 4. Addition und Subtraction der Brüche.

Sind Brüche oder gemischte Zahlen teils zu addiren, teils zu subtrahiren, so zieht man von der Summe aller zu addirenden positiven Glieder die Summe aller zu subtrahirenden negativen Glieder ab. z. B.

1) $$\frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{7}{10} + \frac{5}{6} - \frac{5}{12} - \frac{7}{18} + \frac{287}{360}$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{5}{6} + \frac{287}{360}\right) - \left(\frac{7}{10} + \frac{5}{12} + \frac{7}{18}\right)$$

$$= \frac{180 + 135 + 300 + 287}{360} - \frac{126 + 75 + 70}{180}$$

$$= \frac{902}{360} - \frac{271}{180} = \frac{902 - 542}{360} = \frac{360}{360} = 1.$$

2) $$6\frac{3}{4} - 2\frac{2}{3} + 17\frac{5}{9} - \frac{5}{6} - 4\frac{1}{2} - 8\frac{1}{6} + \frac{7}{36}$$

$$= 9\,\frac{27 - 24 + 20 - 30 - 18 - 6 + 7}{36}$$

$$= 9\,\frac{(27 + 20 + 7) - (24 + 30 + 18 + 6)}{36}$$

$$= 9\,\frac{54 - 78}{36} = 8\,\frac{(54 + 36) - 78}{36} = 8\frac{12}{36} = 8\frac{1}{3}$$

## 5. Multiplication der Brüche.

a) Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl oder eine ganze Zahl mit einem Bruche multiplicirt, indem man entweder den Zähler mit der ganzen Zahl multiplicirt, oder, wo es möglich ist, den Nenner durch dieselbe dividirt.

1) $\frac{5}{6} \cdot 7 = \frac{5 \cdot 7}{6} = \frac{35}{6} = 5\frac{5}{6}.$

2) $\frac{5}{8} \cdot 4 = \frac{5 \cdot 4}{8} = \frac{20}{8} = 2\frac{4}{8} = 2\frac{1}{2}.$

$\frac{5}{8} \cdot 4 = \frac{5}{8 : 4} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}.$

3) $\frac{19}{24} \cdot 8 = \frac{19}{24 : 8} = \frac{19}{3} = 6\frac{1}{3}.$

4) $20 \cdot \frac{7}{40} = \frac{7}{40 : 20} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}.$

Anm. Eine ganze Zahl oder ein Bruch wird durch Multiplication mit einem echten Bruche immer kleiner. Warum?

b) Zwei oder mehrere Brüche werden multiplicirt, wenn man das Product ihrer Zähler durch das Product ihrer Nenner dividirt.

(Anm. Der Beweis dieses Satzes ist dem Unterrichte vorbehalten.)

Hat der Zähler des einen Bruches mit dem Nenner des andern Bruches einen gemeinschaftlichen Teiler oder Divisor, so kann man durch Division mit demselben die Rechnung vereinfachen.

$$\frac{5}{7} \cdot \frac{4}{9} = \frac{5 \cdot 4}{7 \cdot 9} = \frac{20}{63}$$

$$\frac{26}{45} \cdot \frac{27}{65} = \frac{2 \cdot 13}{5 \cdot 9} \cdot \frac{3 \cdot 9}{5 \cdot 13} = \frac{6}{25}$$

oder

$$\frac{26}{45} \cdot \frac{27}{65} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 5} = \frac{6}{25}$$

d) Gemischte Zahlen werden vor der Multiplication in unechte Brüche verwandelt, ganze Zahlen in Brüche mit dem Nenner 1.

$$12 \cdot 5\frac{1}{2} \cdot 3\frac{4}{7} \cdot 5\frac{3}{5}$$

$$= \frac{12 \cdot 11 \cdot 25 \cdot 28}{1 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 5}$$

$$= \frac{6 \cdot 11 \cdot 5 \cdot 4}{1} = 1320.$$

## 6. Division der Brüche.

a) Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividirt, indem man entweder den Zähler des Bruches durch die ganze Zahl dividirt oder den Nenner mit derselben muliplicirt. Haben der Zähler und die ganze Zahl einen gemeinschaftlichen Teiler oder Divisor, so dividirt man zuvor mit demselben.

$$\frac{12}{13} : 4 = \frac{12 : 4}{13} = \frac{3}{13}$$

$$\frac{3}{4} : 5 = \frac{3}{4 . 5} = \frac{3}{20}$$

b) Ein Bruch wird durch einen Bruch dividirt, indem man das Product aus den Zahlen des Dividenden und dem Nenner des Divisors dividirt durch das Product aus dem Nenner des Dividenden und dem Zähler des Divisors oder kurz: Zwei Brüche werden dividirt, indem man mit dem umgestürzten Divisor (dem reciproken Werte) multiplicirt.

Anm. Jede Zahl oder jeder Bruch multiplicirt mit dem reciproken Werte ist = 1. Beweis bleibt dem Unterrichte vorbehalten.

z. B. $$\frac{4}{5} : \frac{2}{3} = \frac{3 . 4}{5 . 2} = \frac{12}{10} = 1\frac{2}{10} = 1\frac{1}{5}$$

$$\frac{4}{5} : \frac{2}{3} = \frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{5} . \frac{3}{\cancel{2}} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$$

c) Jede ganze Zahl kann man sich immer als Bruch mit dem Nenner 1 denken. z. B. $3 = \frac{3}{1}$; der reciproke Wert von 3 ist also $\frac{1}{3}$.

z. B. $$\frac{9}{10} : 3 = \frac{9 : 3}{10} = \frac{3}{10}$$

oder $$\frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{10} : \frac{1}{\cancel{3}} = \frac{3}{10}$$

d) Zwei Brüche können, wo es möglich ist, auch dividirt werden, indem man Zähler durch Zähler und Nenner durch Nenner dividirt. z. B.

$$\frac{12}{49} : \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$$

e) Gemischte Zahlen werden wie bei der Multiplication in unechte Brüche verwandelt.

z. B. $$10\frac{1}{4} : 20\frac{1}{2} = \frac{41}{4} : \frac{41}{2} = \frac{1}{2}$$

## 7. Von den zusammengesetzten Brüchen oder den sogenannten Bruchbrüchen.

Unter einem sogenannten Bruchbruch versteht man einen Bruch, in welchem der Zähler oder der Nenner oder beide aus Brüchen oder aus einer Verbindung von Brüchen bestehen.

z. B. $\frac{\frac{3}{4}}{5}$, $\frac{5}{\frac{4}{9}}$, $\frac{\frac{3}{7}}{\frac{2}{5}}$, $\frac{5\frac{1}{2}}{2\frac{2}{3}}$

1) $\frac{\frac{3}{4}}{5} = \frac{3}{4} : 5 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{20}.$

2) $\frac{5}{\frac{4}{9}} = 5 : \frac{4}{9} = 5 \cdot \frac{9}{4} = \frac{45}{4} = 11\frac{1}{4}.$

3) $\frac{\frac{3}{7}}{\frac{2}{5}} = \frac{3}{7} : \frac{2}{5} = \frac{3}{7} \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{14} = 1\frac{1}{14}.$

4) $\frac{5\frac{1}{2}}{2\frac{2}{3}} = \frac{\frac{11}{2}}{\frac{8}{3}} = \frac{11}{2} : \frac{8}{3} = \frac{11}{2} \cdot \frac{3}{8} = \frac{33}{16} = 2\frac{1}{16}$

Anm. Wenn der Bruchbruch die Form $\frac{\frac{3}{7}}{\frac{2}{5}}$ hat, so gibt das Product der beiden äußern Zahlen den Zähler, das Product der beiden inneren den Nenner.

z. B. $\frac{\frac{3}{7}}{\frac{2}{5}} = \frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 2} = \frac{15}{14} = 1\frac{1}{14}.$

$\frac{\frac{3}{4}}{5} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{1}} = \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 5} = \frac{3}{20}$

Betreffs zusammengesetzter Ausdrücke wird in Bezug auf die Aufeinanderfolge der Operationen und Behandlung der Klammern auf Seite 10, 11 u. 12 verwiesen.

z. B. $[(13\frac{1}{9} + 12\frac{5}{6} : \frac{2}{9}) - (10\frac{2}{3} \cdot 75 - 799\frac{3}{4})] : \frac{1}{18}$

$= [(13\frac{1}{9} + 57\frac{3}{4}) - (800 - 799\frac{3}{4})] : \frac{1}{18}$

$= [70\frac{31}{36} - \frac{1}{4}] : \frac{1}{18}$

$= 70\frac{22}{36} : \frac{1}{18}$

$= \frac{2542}{36} \cdot \frac{18}{1}$

$= 1271$

## 8. Resolvirung benannter Brüche.

Brüche werden in Einheiten einer niederen Sorte verwandelt, wenn man den Bruch mit der Reductionszahl multiplicirt.

z. B. 1) Wie viel deutsche Reichspf. geben $\frac{3}{5}$ Mark?

$$\frac{3}{5} \cdot 100 = \frac{3 \cdot \overset{20}{\cancel{100}}}{\cancel{5}} = 60 \text{ dl. deutsche Reichsw.}$$

2) Wie viele Centimes geben $\frac{4}{5}$ Francs?

$$\frac{4}{5} \cdot 100 = 4 \cdot 20 = 80 \text{ Centimes.}$$

### 9. Reducirung benannter Brüche.

Einheiten einer niedern Ordnung werden in einen Bruch einer höhern Ordnung verwandelt, wenn man durch die Reduktionszahl dividirt.

1) Wie viele Mark sind 90 dl. deutsche Reichswährung?

$$90 \text{ dl.} = \frac{90}{100} = \frac{9}{10} \text{ Mark.}$$

2) Wie viele Francs sind 60 Centimes?

$$60 \text{ Centimes} = \frac{60}{100} \text{ Francs} = \frac{6}{10} \text{ Francs} = \frac{3}{5} \text{ Francs.}$$

3) Wie viele Ballen sind 15 Buch Schreibpapier?

$$15 \text{ Buch} = \frac{15}{200} = \frac{3}{40} \text{ Ballen.}$$

## V. Decimalbrüche.

### 1. Erklärung.

Die Haupteigenschaft des dekadischen Zahlensystems besteht darin, daß jede Ziffer, wenn sie um eine Stelle nach rechts gerückt wird, einen 10mal kleineren Wert hat. Wenn man nun dieses Zahlensystem auf Brüche ausdehnt, so entstehen dadurch die Dezimalbrüche; oder bildet man eine Reihe Brüche in der Weise, daß man zum Nenner eine Eins mit so viel Nullen nimmt, als der Zähler Ziffern hat, wie $\frac{7}{10}$, $\frac{22}{100}$, $\frac{447}{1000}$ 2c., so ist nicht nötig, den Nenner anzuschreiben, weil er aus dem Zähler dadurch bestimmt wird, daß für jede Ziffer im Zähler eine 0 im Nenner gedacht wird. Die einzelnen Ziffern des ohne Nenner geschriebenen Zählers nennt man Decimalen, welche von den etwa vorhandenen Ganzen durch ein Komma getrennt werden. Sind keine Ganzen vorhanden, so wird an deren Stelle eine 0 gesetzt.

Die auf diese Art geschriebenen Brüche, welche also nur die Zahl 10 oder eine Potenz von 10 zum Nenner haben, heißen Decimalbrüche.

z. B. $\frac{3}{10} = 0{,}3$, $\frac{33}{10} = 0{,}33$, $\frac{449}{1000} = 0{,}449$, $2\frac{37}{100} = 2{,}37$.

Anm. Die Decimalbrüche sind nichts anderes als die Fortsetzung des dekadischen Zahlensystems unter die Einheit.

z. B. 6783,53675

| | |
|---|---|
| 6 Tausender | 5 Zehntel |
| 7 Hunderter | 3 Hundertel |
| 8 Zehner | 6 Tausendtel |
| 3 Einheiten | 7 Zehntausendtel |
| vor dem Komma | 5 Hunderttausendtel |
| | nach dem Komma. |

Wenn der Nenner eines Decimalbruches immer eine 1 mit so vielen 0 ist, als der Zähler Ziffern hat, so muß auch umgekehrt der Zähler immer soviele Ziffern haben, als der Nenner 0 hat.

Ist der Bruch $\frac{3}{100}$ gegeben, so hat hier der Zähler nur eine Ziffer 3; der Zähler muß aber, wenn der Bruch $\frac{3}{100}$ als Decimalbruch geschrieben werden soll, 2 Ziffern haben, weil der Nenner 2 Nullen hat.

Es wird daher der Zahl 7 eine Null vorgesetzt, die keinen Wert hat, aber den Wert des 3 um das Zehnfache verringert; es ist also $\frac{7}{100} = 0{,}07$; ebenso ist $\frac{7}{10000} = 0{,}0007$ $3\frac{37}{10000} = 3{,}0037$.

Ein Decimalbruch bleibt seinem Werte nach unverändert, wenn man demselben eine oder mehrere Nullen anhängt. Indem man nämlich dem Decimalbruch eine Null anhängt, wird auch dem dazu gedachten Nenner eine Null angehängt, da der ganze Bruch sowohl im Nenner als im Zähler mit 10 multiplicirt, d. h. erweitert worden ist.

z. B. $\frac{3}{10} = \frac{30}{100} = \frac{300}{1000} = \frac{3000}{10000}$

oder $0{,}3 = 0{,}30 = 0{,}300 = 0{,}3000$

## 2. Addition der Decimalbrüche.

Decimalbrüche werden addirt, indem man die gleichnamigen Stellen wie bei ganzen Zahlen addirt.

Am einfachsten schreibt man bei der Addition die Decimalbrüche so untereinander, daß genau Komma unter Komma zu stehen kommt, wodurch dann von selbst die gleichnamigen Stellen in einer Reihe erscheinen z. B.

$347{,}632 + 5{,}05439 + 10{,}3 + 0{,}000475 + 1237{,}1456 + 4{,}2 + 16{,}57545 = 1620{,}907915.$

oder

```
  347,632
    5,05439
   10,3
    0,000475
 1237,1456
    4,2
   16,57545
 -----------
 1620,907915
```

## 3. Subtraction der Decimalbrüche.

Decimalbrüche werden von einander subtrahirt wie ganze Zahlen und zwar, indem man die gleichnamigen Stellen von einander subtrahirt (Komma unter Komma).

Hat der Subtrahend weniger Decimalstellen als der Minuend oder auch umgekehrt, so sind die fehlenden Stellen durch Nullen zu ersetzen.

z. B. 238,26375 — 86,97543 = 151,28832

oder

```
238,26375
 86,97543
---------
151,28832
```

67,245 — 11,0047865 = 56,2402135

oder

```
67,2450000
11,0047865
----------
56,2402135
```

32,347958 — 9,526 = 22,821958.

```
32,347958
 9,526000
---------
22,821958
```

## 4. Addition und Subtraction der Decimalbrüche.

Sollen Decimalbrüche teils addirt, teils subtrahirt werden, so zieht man von der Summe der positiven die Summe der negativen Glieder ab.

z. B. 403,125 + 12,6017 + 4321,1 — 5,3 — 7,061 + 1,65 — 7,8379

= (403,125 + 12,6017 + 4321,1 + 1,65) — (5,3 + 7,061 + 7,8379).

= 4738,4767 — 20,1989

= 4718,2778.

oder

```
 403,125
  12,6017                          5,3
4321,1                             7,061
   1,65                            7,8379
---------                         -------
4738,4767 (Summe der positiven    20,1989 (Summe der negativen
           Glieder.)                       Glieder.)
—20,1989
---------
4718,2778
```

## 5. Multiplication der Decimalbrüche.

Decimalbrüche werden miteinander multiplicirt, wenn man sie ohne Rücksicht auf das Decimalkomma multiplicirt und von dem Producte soviel Decimalstellen und zwar von rechts nach links abscheidet, als die Factoren zusammen haben.

z. B. 1) 38,406 . 0,23 = 8,83338

```
 38,406
   0,23
-------
 115218
 76812
-------
8,83338
```

2) 0,000718 . 23 = 0,016514

```
     23
-------
   2154
  1436
-------
0,016514
```

Ein Decimalbruch wird mit 10, 100, 1000, 10000 ꝛc. multiplicirt, wenn man das Decimalkomma ein, zwei, drei, vier u. s. w. Stellen nach rechts rückt.

z. B. 2,0784 . 100 = 207,84
0,653 . 10000 = 6530.

## 6. Division der Decimalbrüche.

1) Hat der Dividend mehr Decimalstellen als der Divisor, so multiplicirt man Dividend und Divisor mit 10 oder 100, 1000 u. s. w., so daß der Divisor eine ganze Zahl wird. Dann werden im Quotienten von rechts nach links soviel Decimalstellen abgeschnitten, als der Dividend nach der Multiplication noch hat.

2) Hat der Divisor mehr Decimalstellen als der Dividend, so werden ebenfalls Dividend und Divisor mit einer Potenz von 10 multiplicirt, welche den Divisor (also auch den Dividend) zu einer ganzen Zahl macht.

3) Zwei Decimalbrüche werden dividirt wie ganze Zahlen, wenn sie gleich viele Decimalstellen haben.

Anm. Kurz dürfte dieses Gesetz so lauten:
Ist ein Decimalbruch durch einen andern zu dividiren, so macht man den Divisor zu einer ganzen Zahl, indem man sowohl Dividend als Divisor mit einer passenden Potenz von 10 dividirt.

Durch Anhängen von Nullen an den Dividend kann man die Division bis zu einer beliebigen Anzahl von Decimalstellen im Quotienten fortsetzen.

```
1) 75,36 : 24 = 3,14            5,6088 : 4,56
   72                              560,88 : 456 = 1,23
   --                              456
   33                              ----
   24                              1048
   --                               912
    96                             ----
    96                              1368
    --                              1368
     0                              ----
                                       0

2) 983,09 : 0,2657            3) 24625,6383 : 34,7121
   9830900 : 2657 = 3700          246256383 : 347121 = 623
   7971                           2082726
   -----                          -------
   18599                           798378
   18599                           694242
   -----                           -------
   ----00                          1041363
                                   1041363
                                   -------
                                         0
```

Soll ein Decimalbruch durch 10, 100, 1000 u. s. w. dividirt werden, so hat man nur das Decimalkomma um ein, zwei, drei u. s. w. Stellen nach links zu rücken.

14250,654 : 1000 = 14,250654.

## 7. Abgekürzte Multiplication.

```
Gewöhnliche Multiplication.      Abgekürzte Multiplication.
3,86402 . 1,25068                3,86402 . 1,25068
-----------------                -----------------
386402                           386402
  772804                          77280
  1932010                         19320
     2318412                        232
       3091216                       31
-----------------                -------
4,8326525336                     4,83265
```

Anm. Das Product der abgekürzten Multiplication hat stets soviele Decimalstellen, als man durch die Multiplication der Decimalen mit der höchsten Stelle des Multiplicators erhält.

## 8. Abgekürzte Division der Decimalbrüche.

Das Verfahren besteht im wesentlichen in der Weglassung von je einer Stelle im Divisor statt der Ansetzung einer Null im Dividend.

Gewöhnliche Division.

```
2,486235 : 1,623804 = 1,531117
1623804
 8624310
 8119020
  5052900
  4871412
   1814880
   1623804
    1910760
    1623804
     2869560
     1623804
     12457560
     11366628
      1090932
```

Abgekürzte Division.

```
2,486235 : 1,623804 = 1,531119
1623804
 862431
 811902
  50529
  48714
   1815
   1623
    192
    162
     30
     16
     14
     14
      0
```

Anm. Die weitere Ausführung der abgekürzten Multiplication und Division bleibt dem Unterrichte vorbehalten.

## 9. Verwandlung der gemeinen Brüche in Decimalbrüche.

Ein gemeiner Bruch wird in einen Decimalbruch verwandelt, indem man ihn so erweitert, d. h. Zähler und Nenner mit einer solchen Zahl multiplicirt, daß der Nenner eine Potenz von 10 wird.

z. B. $\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{4}{10} = 0{,}4$

$\frac{3}{25} = \frac{3 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{12}{100} = 0{,}12$

Man erreicht diesen Zweck immer, wenn man den Zähler des Bruches durch den Nenner dividirt.

z. B. $\frac{5}{8} = 5{,}000 : 8 = 0{,}625$

Bei dieser Division können zwei Fälle eintreten:

a) Die Division geht auf und der erhaltene Decimalbruch ist ein endlicher. Der Wert des Decimalbruches ist genau gleich dem Werte des gegebenen Bruches.

z. B. $\frac{3}{4} = 0{,}75$

Anm. Dieser Fall tritt immer ein, wenn sich der Nenner des gegebenen Bruches in ein Product zerlegen läßt, in welchem nur die Factoren 2 oder 5, oder 2 und 5 vorkommen.

b) Die Division geht nicht auf und der erhaltene Decimalbruch ist ein unendlicher. Sein Wert ist nicht genau gleich dem Werte des gegebenen Bruches.

z. B. $\frac{2}{3} = 0{,}666\ldots$

c) Ein Decimalbruch, bei dem sich ein oder mehrere Ziffern regelmäßig wiederholen, heißt ein periodischer Decimalbruch.

Man teilt deßhalb die Decimalbrüche ein:

α) in reinperiodische Decimalbrüche, wenn die Periode gleich hinter dem Komma beginnt.

z. B. $0{,}476476\ldots\ldots = 0{,}\overset{\frown}{476}$

$0{,}222\ldots = 0{,}\overset{\frown}{2}.$

β) in unreinperiodische, wenn nicht unmittelbar nach dem Komma die Periode beginnt, sondern derselben noch Ziffern vorausgehen, die man Vorziffern nennt.

z. B. $0{,}3666\ldots = 0{,}\underline{3}\overset{\frown}{6}$ $0{,}152727\ldots = 0{,}1\underline{5}\overset{\frown}{27}$

## 10. Verwandlung der Decimalbrüche in gemeine.

a) Die Verwandlung der endlichen Decimalbrüche in gemeine gibt sich von selbst aus der Entstehung der Decimalbrüche.

z. B. $0{,}15 = \frac{15}{100} = \frac{15 : 5}{100 : 5} = \frac{3}{20}$

b) Bei der Verwandlung der reinperiodischen Decimalbrüche in gemeine schreibt man die Ziffern der Periode als Zähler und als Nenner soviele Neuner, als die Periode Stellen hat.

z. B. $0{,}\overset{\frown}{45} = \frac{45}{99} = \frac{45 : 9}{99 : 9} = \frac{5}{11}.$

c) Ein unreinperiodischer (gemischtperiodischer) Decimalbruch wird auf folgende Weise in einen gemeinen verwandelt:

$\alpha$) Man subtrahire von den Vorziffern und der Periode die Vorziffern. Die Differenz gibt den Zähler. Als Nenner setze man so viele Neuner, als die Periode Stellen hat und hänge derselben soviele Nullen an, als der Periode Vorziffern vorausgehen.

$$0{,}\underline{3}\overset{\frown}{6} = \frac{36 - 3}{90} = \frac{33}{90} = \frac{11}{30.}$$

$$1{,}\underline{15}\overset{\frown}{27} = 1\frac{1527 - 15}{9900} = 1\frac{1512}{9900} = 1\frac{42}{275}$$

$\beta$) durch Multiplication

$$1{,}\underline{15}\overset{\frown}{27} = 115\frac{27}{99} : 100 = 115\frac{3}{11} : 100$$

$$= \frac{1268}{11} \cdot \frac{1}{100} = \frac{1268}{1100} = \frac{317}{275} = 1\frac{42}{275}$$

$\gamma$) durch Addition

$$1{,}\underline{15}\overset{\frown}{27} = 1\frac{15}{100} + \frac{27}{9900}$$

$$= 1\frac{15 \,.\, 99 + 27}{9900} = 1\frac{1485 + 27}{9900}$$

$$= 1\frac{1512}{9900} = 1\frac{42}{275}$$

Anm. Kommen in einer Rechnung gemeine und Decimalbrüche vor, so werden in der Regel die gemeinen Brüche in Decimalbrüche verwandelt. Kommen mehr gemeine Brüche als Decimalbrüche vor und unter den letzten mehrere unendliche und periodische, so ist es genauer, die Decimalbrüche in gemeine zu verwandeln.

$$\frac{1{,}\overset{\frown}{3} + 2\frac{5}{6} - 0{,}1\overset{\frown}{6}}{\frac{7}{8} - 0{,}75 + 0{,}25} = \frac{1\frac{1}{3} + 2\frac{5}{6} - \frac{1}{6}}{0{,}875 - 0{,}75 + 0{,}25}$$

$$= \frac{4}{0{,}875 - 0{,}50} = \frac{4}{0{,}375} = \frac{4}{\frac{3}{8}} = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3.}$$

## 11. Resolviren mit Decimalbrüchen.

1) 0,2 Mark d. R. W. sollen in Pf. verwandelt werden.
0,2 . 100 = 20 Pf.

2) 6,5 Francs sollen in Centimes verwandelt werden.
6,5 . 100 = 650 Centimes.

## 12. Reduciren mit Decimalbrüchen.

1) 9647 Pf. d. R. W. sollen in Mark reducirt werden.
9647 : 100 = 96,47 Mark.

2) 7215 Centimes sollen in Francs verwandelt werden.
7215 : 100 = 72,15 Francs.

# VII. Flächen- und Körperberechnung.

Alles, was einen begrenzten Raum einnimmt, ist ein Körper. Derselbe hat eine dreifache Ausdehnung: Länge, Breite und Höhe (Dicke).

Die Grenzen eines Körpers nennt man Fläche. Eine Fläche hat zwei Ausdehnungen, nämlich Länge und Breite. Die Grenze einer Fläche ist eine Linie; sie hat nur eine Ausdehnung, nämlich die Länge.

Von den geradlinigbegrenzten Figuren betrachten wir das Dreieck und das Viereck; von den krummlinig begrenzten den Kreis.*)

Ein Viereck mit einem Paar gleichlaufenden (parallelen) Seiten heißt Trapez; ein Viereck mit je zwei parallelen Seiten heißt Parallelogramm. Hat dieses gleiche (rechte) Winkel, so heißt es Rechteck, sind überdieß auch die Seiten gleich, Quadrat.

Jede Seite einer geradlinigen Figur kann als Grundlinie (Basis) betrachtet werden.

Unter Höhe versteht man beim Dreiecke die Entfernung der Grundlinie von dem gegenüberliegenden Ecke und beim Parallelogramm von der gegenüberliegenden Seite. Am Quadrat und Rechteck kann man je zwei in einem Ecke zusammenstoßende Seiten als Grundlinie und Höhe, Länge und Breite betrachten.

## 1. Umfangsberechnung.

Man erhält den Umfang (Perimeter = P) einer Fläche, wenn man die Seiten derselben addirt.

a) der Umfang (Perimeter = P) eines Quadrates ist die Summe aller vier Seiten, oder die Quadratseite mit 4 multiplicirt.

$$P = b + b + b + b = 4\,b$$

Wie groß ist der Umfang eines Quadrates, dessen Seite 6 m lang ist?

$$P = 6\text{ m} + 6\text{ m} + 6\text{ m} + 6\text{ m} = 6\text{ m} \,.\, 4 = 24\text{ m}$$

b) Der Umfang des Rechteckes (Parallelogrammes) wird gefunden, wenn man Länge und Breite addirt und die erhaltene Summe mit 2 multiplicirt.

$$P = (a + b)\,.\,2 = 2a + 2b$$
$$a = 6\text{ m}$$
$$b = 4\text{ m}$$
$$P = (4\text{ m} + 6\text{ m})\,.\,2 = 20\text{ m}$$

Welches ist der Umfang eines Dreieckes?

$$a = 3\text{ m},\quad b = 6\text{ m},\quad c = 5\text{ m}$$

3 m + 6 m + 5 m = 14 m ist der Umfang des Dreieckes.

---

*) Siehe bei den nachfolgenden Erklärungen und Berechnungen die Figuren im Anhange.

Der Umfang (die Peripherie) eines Kreises findet man, wenn man den Halbmesser (Radius = r) mit 2 und dann mit 3,14 (der sogenannten Ludolphine) multiplicirt.

$$P = 2\ r\ .\ 3{,}14.$$

Wie groß ist der Umfang eines Kreises, dessen Radius 6 m hat?

$$6\ m\ .\ 2\ .\ 3{,}14 = 12\ m\ .\ 3{,}14 = 37{,}68\ m$$

## 2. Flächenberechnung.

F = Flächeninhalt.
b = Grundlinie.
h = Höhe.

F des Quadrates $= b\ .\ b = b^2$
F des Rechteckes $= b\ .\ h$
F des Parallelogrammes $= b\ .\ h$
F des Dreieckes $= \frac{1}{2}\ b\ .\ h$
F des Trapezes $= \frac{1}{2}\ .\ (a + b)\ .\ h$
F des Kreises $= r^2\ .\ 3{,}14.$

1) Flächeninhalt eines Quadrates mit der Seite 5 m?

$$F = 5\ m\ .\ 5\ m = 25\ \square^m$$

2) Welches ist der Flächeninhalt eines Saales in Rechteckform, der 7 m. lang und 5,2 m breit ist?

$$F = 7\ m\ .\ 5{,}2\ m = 36{,}4\ \square^m$$

3) Welches ist der Flächeninhalt eines Dreieckes, dessen Grundlinie 6 m und dessen Höhe 5 m ist?

$$F = \frac{1}{2}\ .\ b\ .\ h = \frac{1}{2}\ .\ 6\ m\ .\ 5\ m = 15\ \square^m$$

4) Welches ist der Flächeninhalt einer Wiese in der Form eines Trapezes, dessen Grundlinie 25 m, dessen gegenüberliegende parallele Seite 17,2 m und dessen Höhe 20 m beträgt?

$$F = \frac{1}{2}\ .\ (a + b)\ .\ h = \frac{1}{2}\ .\ (17{,}2\ m + 25\ m)\ .\ 20\ m$$
$$= 10\ m\ .\ (17{,}2\ m + 25\ m) = 10\ m\ .\ 42{,}2\ m = 422\ \square^m$$

5) Welches ist der Inhalt eines Kreises, dessen Halbmesser 6 m ist.

$$F = r^2\ .\ 3{,}14$$
$$= 6\ m.\ .\ 6\ m\ .\ 3{,}14$$
$$= 36\ \square^m\ .\ 3{,}14$$
$$= 113{,}04\ \square^m$$

## 3. Körperberechnung.

Von den Körpern erwähnen wir nur: a) den Würfel, b) das Prisma, c) die Pyramide, d) den Cylinder, e) den abgestumpften Kegel und f) die Kugel.

$C$ = Cubikinhalt
$F$ = Grundfläche (Länge und Breite)
$l$ = Länge
$b$ = Breite
$h$ = Höhe
$r$ = Radius.

1) Welches ist der Cubikinhalt eines Würfels, der 0,5 m. hoch ist?

$$C = l \,.\, b \,.\, h \,.$$
$$C = 0{,}5\ m \,.\, 0{,}5\ m \,.\, 0{,}5\ m$$
$$= 0{,}25\ \square^m \,.\, 0{,}5\ m$$
$$= 0{,}125\ cub^m$$

2) Welches ist der Cubikinhalt eines Prisma, das 1,5 m hoch ist und dessen Grundfläche 2,2 m lang und 1,8 m breit ist?

$$C = l \,.\, b \,.\, h.$$
$$C = 1{,}5\ m \,.\, 2{,}2\ m \,.\, 1{,}8\ m$$
$$= 3{,}3\ \square^m \,.\, 1{,}8\ m$$
$$= 5{,}94\ cub^m$$

3) Welches ist der Cubikinhalt einer vierseitigen Pyramide, die 132 m hoch ist und deren Grundfläche 250 m lang und 250 m breit ist?

$$C = \tfrac{1}{3} \,.\, h \,.\, F$$
$$C = \tfrac{1}{3} \,.\, (132\ m \,.\, 250\ m \,.\, 250\ m)$$
$$= \tfrac{1}{3} \,.\, (132\ m \,.\, 62500\ \square^m)$$
$$= \tfrac{1}{3} \,.\, 8250000\ cub^m$$
$$= 2750000\ cub^m$$

4) Welches ist der Cubikinhalt eines Baumstammes, der die Form eines Cylinders hat, der 6 m hoch ist und dessen Radius 0,5 m hat?

$$C = r^2 \,.\, 3{,}14 \,.\, h$$
$$= 0{,}5\ m \,.\, 0{,}5\ m \,.\, 3{,}14 \,.\, 6\ m$$
$$= 0{,}25\ \square^m \,.\, 3{,}14 \,.\, 6\ m$$
$$= 4{,}71\ cub^m$$

5) Welches ist der Cubikinhalt eines Baumstammes, der die Form eines abgestumpften Kegels hat, der 6 m hoch, dessen kleiner Radius 0,2 m und dessen großer Radius 0,5 m beträgt? *)

$$C = \tfrac{1}{3} \,.\, h \,.\, 3{,}14 \,.\, (R^2 + r^2 + R \,.\, r)$$
$$C = \tfrac{1}{3} \,.\, 6\ m \,.\, 3{,}14 \,.\, (0{,}5\ m \,.\, 0{,}5\ m + 0{,}2\ m \,.\, 0{,}2\ m + 0{,}5\ m \,.\, 0{,}2\ m)$$
$$= 6{,}28\ m \,.\, (0{,}25\ \square^m + 0{,}04\ \square^m + 0{,}1\ \square^m)$$
$$= 6{,}28\ m \,.\, 0{,}39\ \square^m$$
$$= 2{,}4492\ cub^m$$

---

*) $R$ = Radius der großen Kreisfläche des abgestumpften Kegels.
$r$ = Radius der kleinen Kreisfläche desselben.

6) Der Inhalt einer Kugel ist

$\frac{4}{3} r^3 . 3,14$

Welches ist der Cubikinhalt der Erde, wenn man als die Länge des Erddurchmessers 1720 Meilen annimmt?

$C = \frac{4}{3} . 860 . 860 . 860 . 3,14 = 2662954453\frac{1}{3}$ cub$^m$

(Die Oberfläche der Kugel ist gleich $4 . r^2 . 3,14$ oder $d^2 . 3,14$).*)

Anm. Sowol bei der Flächen- als Körperberechnung ist die Entwicklung der Formeln für die Berechnung der einzelnen Seiten dem Unterrichte vorbehalten. Ueberhaupt ist dieser Abschnitt nur für jene Schüler berechnet, welche später nicht mehr Gelegenheit haben, sich eingehender mit Planimetrie und Stereometrie zu beschäftigen.

## 4. Gewichtsberechnung der Körper.

Unter dem specifischen Gewichte eines Körpers versteht man diejenige Zahl, welche anzeigt, wieviel ein Körper schwerer (leichter) ist als ein gleich großes Volumen (gleich großer Rauminhalt) Wasser bei 4⁰ Celsius.**)

Das specifische Gewicht des Wassers = 1.

$G = V . s$ d. h.

Man findet das wirkliche Gewicht eines Körpers in Kilogramm ausgedrückt, wenn man seinen Inhalt in Cubikdecimeter ausdrückt und mit dem specifischen Gewichte desselben multiplicirt.

z. B. Eine rechteckige Eisenstange ist 1 m 5 dm lang und 8 cm. breit, 5 cm dick, das specifische Gewicht des Eisens ist 7,8. Wie groß ist das wirkliche Gewicht?

$G = 15 . 0,8 . 0,5 . 7,8$ Kgr.

$= 12 . 0,5 . 7,8$ Kgr. $= 6 . 7,8$ Kgr. $= 46,8$ Kgr.

$V = \frac{G}{s}$ d. h.

Man findet den körperlichen Inhalt in Cubikdecimetern ausgedrückt, wenn man das durch Kgr. ausgedrückte wirkliche Gewicht durch das specifische Gewicht dividirt.

z. B. Eine Bleikugel wiegt 2,27 Kgr. Das specifische Gewicht des Bleies ist 11,35. Welches ist der Cubikinhalt der Bleikugel?

2,270 : 11,35 = 0,2 cub$^{dm}$
2 270
0

*) d = Durchmesser.
**) V = Kubikinhalt (Volumen).
G = wirkliches Gewicht.
s = specifisches Gewicht.

# VIII. Schlussrechnung.

Manche glauben, sehr viele Aufgaben lassen sich nur durch die Regel de tri lösen und halten deßhalb die Proportion für die Seele der Arithmetik. In den meisten Fällen gelangt man jedoch durch die sogenannte Schlußrechnung, welche bloß die vier species voraussetzt, viel rascher zum Ziele.

Das Rechnen nach Schlüssen findet statt durch das Zurückführen auf die Einheit und dann durch das Schließen von der Einheit auf die Mehrheit. z. B.

a) Wenn 9 Arbeiter zu einer Arbeit 10 Tage brauchen, wie lange brauchen 5 Arbeiter zu derselben Arbeit?

9 Arbeiter brauchen 10 Tage.
1 Arbeiter braucht 10 . 9 Tage.
5 Arbeiter brauchen $\frac{10 \cdot 9}{5} = 18$ Tage.

b) Wenn 20 Arbeiter in 6 Tagen bei täglich 10 Stunden Arbeit 60 Thaler verdienen, wie viel werden unter gleichen Umständen 40 Arbeiter verdienen, welche 30 Tage und täglich 12 Stunden arbeiten?

Bedingungssatz: 20 Arbeiter verdienen in 6 Tagen bei 10 St. Arbeit 60 Frcs.
Fragesatz: 40 Arbeiter verdienen in 30 Tagen bei 12 St. Arbeit x Frcs.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | Arbeiter verdienen | in 6 | Tagen | bei 10 | St. tägl. | 60 Fr. |
| 1 | „ verdient | „ 6 | „ | „ 10 | „ „ | $\frac{60}{20}$ |
| 1 | „ „ | „ 1 | „ | „ 10 | „ „ | $\frac{60}{20 \cdot 6}$ |
| 1 | „ „ | „ 1 | „ | „ 1 | „ „ | $\frac{60}{20 \cdot 6 \cdot 10}$ |
| 40 | „ verdienen | „ 1 | „ | „ 1 | „ „ | $\frac{60 \cdot 40}{20 \cdot 6 \cdot 10}$ |
| 40 | „ „ | „ 30 | „ | „ 1 | „ „ | $\frac{60 \cdot 40 \cdot 30}{20 \cdot 6 \cdot 10}$ |
| 40 | „ „ | „ 30 | „ | „ 12 | „ „ | $\frac{60 \cdot 40 \cdot 30 \cdot 12}{20 \cdot 6 \cdot 10}$. |

$$\frac{\overset{10}{\cancel{60}} \cdot \overset{2}{\cancel{40}} \cdot 30 \cdot 12}{\cancel{20} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{10}} = 720 \text{ Francs.}$$

# IX. Verhältnisse und Proportionen.

## 1. Erklärungen.

Zwei Zahlen lassen sich in Beziehung auf ihre Größe in doppelter Art miteinander vergleichen. Man kann untersuchen

1) um wieviel,
2) wievielmal eine Zahl größer ist als die andere.

1) Wenn man untersucht, um wieviel die eine Zahl größer ist als die andere, was bekanntlich durch die Subtraction geschieht, so setzt man dieselben in ein arithmetisches Verhältniß.

z. B. 8 — 5 (lies 8 verhält sich arithmetisch zu 5).

Das arithmetische Verhältniß ist gleichbedeutend mit einer formellen Differenz. 8 heißt das Vorderglied, 5 das Hinterglied. Je nachdem das Vorderglied kleiner oder größer ist als das Hinterglied, hat man steigende oder fallende Verhältnisse.

Der Wert eines arithmetischen Verhältnisses wird immer bestimmt durch seine Differenz.

Man versteht darunter diejenige Zahl, welche zum Hinterglied addirt, das Vorderglied als Summe gibt. (Wirkliche Differenz.)

Die Differenzen aller fallenden arithmetischen Verhältnisse sind positive Zahlen; die Differenzen der steigenden arithmetischen Verhältnisse sind immer negative Zahlen.

z. B. 8 — 5 Differenz $= + 3$
5 — 8 „ $= - 3$.

Ein arithmetisches Verhältniß bleibt seinem Werte nach unverändert, wenn man zum Vorderglied und Hinterglied dieselbe Zahl addirt, oder von beiden Zahlen dieselbe subtrahirt.

z. B.
$$8 - 5$$
$$= (8 + 3) - (5 + 3)$$
$$= 11 - 8 \quad \text{Differenz} = + 3$$
$$8 - 5$$
$$= (8 - 3) - (5 - 3)$$
$$= 5 - 2 \quad \text{Differenz} = + 3$$

2) Wenn man untersucht, wievielmal eine Zahl größer ist, als die andere, was durch die Division geschieht, so setzt man die Zahlen in ein geometrisches Verhältniß.

z. B. 8 : 4 (lies 8 verhält sich geometrisch zu 4.)

Das geometrische Verhältniß ist also gleichbedeutend mit einem formellen Quotienten.

Der Wert eines geometrischen Verhältnisses wird durch den Exponenten bestimmt; man versteht darunter diejenige Zahl, mit welcher das Hinterglied multiplicirt das Vorderglied zum Product gibt. (Wirklicher Quotient.)

Die Exponenten der fallenden geometrischen Verhältnisse sind immer größer als 1, die der steigenden geometrischen Verhältnisse stets kleiner als 1.

z. B. 8 : 4 Exponent $= 2$
4 : 8 „ $= \frac{1}{2}$

Ein geometrisches Verhältniß bleibt seinem Werte nach unverändert, wenn man Vorder- und Hinterglied mit derselben Zahl multiplicirt oder dividirt. Man kann nach diesem Satze jedes geometrische Verhältniß, in welchem Brüche vorkommen, in ein anderes mit ganzen Zahlen dadurch verwandeln, daß man die Glieder mit dem gemeinschaftlichen Nenner der Brüche multiplicirt.

z. B. $3\frac{3}{4} : 5\frac{1}{2} = \frac{15}{4} : \frac{22}{4} = 15 : 22.$

## 2. Arithmetische Proportionen.

Wenn man zwei arithmetische Verhältnisse mit gleicher Differenz durch das Gleichheitszeichen verbindet, so entsteht eine arithmetische Proportion.

z. B. $24 - 8 = 20 - 4$

24 und 4 sind die äußern Glieder,
8 und 20 „ „ inneren „
ferner sind 24 und 20 die Vorderglieder,
8 und 14 die Hinterglieder.

Je zwei oder mehrere Vorderglieder und je zwei oder mehrere Hinterglieder heißen homologe (gleichstehende) Glieder.

Hauptsatz.

In einer richtigen arithmetischen Proportion ist die Summe der beiden äußeren Glieder gleich der Summe der beiden inneren Glieder.

z. B. $24 - 8 = 20 - 4$
$24 + 4 = 8 + 20 = 28.$

Ein unbekanntes äußeres Glied ist also gleich der Summe der beiden inneren Glieder minus das bekannte äußere Glied.

z. B. $25 - 23 = 13 - x$
$x = 23 + 13 - 25 = 11.$

Eine Proportion, in der die beiden mittleren Glieder einander gleich sind, heißt eine stetige Proportion.

z. B. $12 - 8 = 8 - 4.$

Das mittlere Glied 8 heißt arithmetisches Mittel zu den äußeren Gliedern. Dasselbe ist immer gleich der halben Summe der gegebenen Zahlen.

z. B. $17 - x = x - 3$
$2x = 17 + 3$
$x = \frac{17 + 3}{2} = 10.$

Das arithmetische Mittel zu mehreren Zahlen ist, wie bereits bei den Durchschnittsberechnungen erwähnt, gleich der Summe dieser Zahlen dividirt durch ihre Anzahl

z. B. 1) Man gebe von folgenden Zahlen: 36, 2, 12, 18, 24, 10 das arithmetische Mittel an.

Das arithmetische Mittel dieser Zahlen

$$= \frac{36 + 2 + 12 + 18 + 24 + 10}{6} = \frac{102}{6} = 17.$$

2) Der höchste Schrannenpreis vom Hektoliter Weizen sei 18 Mark 80 Pf., der niedrigste 16 Mark 70 Pf.; welches ist der Durchschnittspreis?

$$\frac{18{,}8 + 16{,}7}{2} = \frac{35{,}5}{2} = 17{,}75 \text{ Mark} = 17 \text{ Mark } 75 \text{ Pf.}$$

### 3. Geometrische Proportionen.

Wenn man zwei geometrische Verhältnisse mit gleichem Exponenten versieht, so entsteht eine geometrische Proportion.

Hauptsatz.

Das Product der äußeren Glieder ist gleich dem Producte der beiden inneren Glieder.

$$3 : 9 = 16 : 48$$
$$3 \cdot 48 = 9 \cdot 16$$
$$144 = 144$$

Es läßt sich jede Proportion als Produktengleichung anschreiben, und umgekehrt läßt sich aus einer Productengleichung eine Proportion bilden.

z. B. $3 \cdot 15 = 9 \cdot 5$

$3 : 9 = 5 : 15$

Die Factoren des einen Productes geben die äußeren, die des anderen Productes die inneren Glieder.

Ein unbekanntes äußeres Glied ist also gleich dem Producte der beiden inneren Glieder, dividirt durch das bekannte äußere Glied.

$$6\frac{3}{4} : 3\frac{3}{8} = 6 : x$$

$$x = \frac{3\frac{3}{8} \cdot 6}{6\frac{3}{4}} = \frac{27 \cdot 6 \cdot 4}{8 \cdot 27} = 3.$$

Eine geometrische Proportion heißt stetig, wenn die beiden mittleren Glieder einander gleich sind.

z. B. $12 : 6 = 6 : 3$

oder $12 : 6 : 3$

6 ist das geometrische Mittel zwischen 12 und 3.

Das geometrische Mittel ist gleich der Quadratwurzel aus dem Producte der beiden bekannten Zahlen.

Anm. Unter der Quadratwurzel einer Zahl versteht man diejenige Zahl, welche mit sich selbst multiplicirt, die vorgelegte gibt.*)

z. B. $\sqrt{4} = 2$ $\sqrt{64} = 8$

$\sqrt{9} = 3$ $\sqrt{81} = 9$

$\sqrt{16} = 4$ $\sqrt{100} = 10$

$\sqrt{25} = 5$ $\sqrt{121} = 11$

$\sqrt{36} = 6$ $\sqrt{144} = 12$

$\sqrt{49} = 7$

Beispiel einer stetigen Proportion.

$$18 : x = x : 8$$
$$x^2 = 8 . 18 = 144$$
$$x = \sqrt{144} = 12$$

Versetzungen der Glieder einer geometrischen Proportion.
(8 Formen.)

| | |
|---|---|
| $16 : 4 = 20 : 5$ | $20 : 5 = 16 : 4$ |
| $16 : 20 = 4 : 5$ | $20 : 16 = 5 : 4$ |
| $5 : 4 = 20 : 16$ | $4 : 16 = 5 : 20$ |
| $5 : 20 = 4 : 16$ | $4 : 5 = 16 : 20$ |

Veränderungen, die sich bei den Gliedern einer Proportion vornehmen lassen, ohne deren Richtigkeit zu stören:

a) Man kann alle Glieder mit der gleichen Zahl multipliciren oder dividiren.

| | |
|---|---|
| z. B. | $4 : 24 = 6 : 36$ |
| (multiplicirt mit 2) | $8 : 48 = 12 : 72$ |
| (dividirt durch 2) | $2 : 12 = 3 : 18$ |

b) Man kann ein äußeres oder ein inneres Glied mit der gleichen Zahl multipliciren oder dividiren. (Dagegen darf man nie zwei äußere oder zwei innere Glieder mit der gleichen Zahl multipliciren oder dividiren).

$$4 : 24 = 6 : 36$$
$$8 : 24 = 12 : 36$$
$$4 : 12 = 6 : 18$$

Anm. 1. Die Glieder desselben Verhältnisses haben immer gleiche Benennung.

Anm. 2. Die Exponenten derselben Verhältnisse sind immer unbenannte Zahlen.

*) Siehe Anhang.

c) In einer geometrischen Proportion verhält sich die Summe des ersten und zweiten Gliedes zur Summe des dritten und vierten Gliedes wie zwei homologe Glieder. z. B.

$$4 : 12 = 5 : 15$$

$$(4 + 12) : (5 + 15) = 4 : 5 \text{ oder } (4 + 12) : (5 + 15) = 12 : 15$$

$$16 : 20 = 4 : 5 \text{ oder } 16 : 20 = 12 : 15$$

d) In einer geometrischen Proportion verhält sich die Summe der Vorderglieder zur Summe der Hinterglieder, wie ein Vorderglied zu seinem Hinterglied.

$$3 : 12 = 5 : 20$$

$$(3 + 5) : (12 + 20) = 3 : 12 \text{ oder } (3 + 5) : (12 + 20) = 5 : 20$$

$$8 : 32 = 3 : 12 \text{ oder } 8 : 32 = 5 : 20$$

e) in einer continuirlichen Proportion verhält sich die Summe aller Vorderglieder zur Summe aller Hinterglieder, wie ein Vorderglied zu seinem Hinterglied.

z. B. $4 : 14 = 8 : 28 = 6 : 21 = 10 : 35$

$$\begin{aligned}(4 + 8 + 6 + 10) : (14 + 28 + 21 + 35) &= 4 : 14 \\ 28 : 98 &= 4 : 14 \\ &= 8 : 28 \\ &= 6 : 21 \\ &= 10 : 35\end{aligned}$$

Anm. Unter einer **continuirlichen** Proportion versteht man die Gleichung mehrerer geometrischer Verhältnisse mit gleichen Exponenten. Aus mehreren richtigen Proportionen erhält man eine neue richtige Proportion dadurch, daß man die gleichstehenden Glieder miteinander multiplicirt.

$$\begin{aligned}4 : 2 &= 12 : 6 \\ 2 : 3 &= 6 : 9 \\ 5 : 10 &= 3 : 6 \\ 12 : 4 &= 9 : 3\end{aligned}$$

$$(4 \,.\, 2 \,.\, 5 \,.\, 12) : (2 \,.\, 3 \,.\, 10 \,.\, 4) = (12 \,.\, 6 \,.\, 3 \,.\, 9) : (6 \,.\, 9 \,.\, 6 \,.\, 3)$$

$$480 : 240 = 1944 : 972.$$

f) Zwei Verhältnisse einem dritten gleich, sind auch unter sich gleich.

z. B.
$$\begin{aligned}16 : 4 &= 24 : 6 \\ 36 : 9 &= 24 : 6 \\ \hline 16 : 4 &= 36 : 9\end{aligned}$$

g) Sind in 2 Proportionen je 3 Glieder einander gleich, so sind auch die vierten Glieder einander gleich.

z. B.
$$\begin{aligned}16 : 8 &= x : 24 \\ 16 : 8 &= y : 24\end{aligned}$$

$$x = y = \frac{24 \,.\, 16}{8} = 48.$$

Das unbekannte Glied einer Proportion nennt man die 4. mittlere Proportionale zu den drei gleichbenannten Zahlen.

Beispiele der geometrischen Proportion.

a) $63 : 21 = 45 : x$

$$x = \frac{21 \,.\, 45}{63} = \frac{3 \,.\, 45}{9} = 15$$

b) $7{,}2 : 63 = 0{,}88 : z.$

$$z = \frac{63 \,.\, 0{,}88}{7{,}2} = \frac{7 \,.\, 0{,}88}{0{,}8} = \frac{7 \,.\, 0{,}11}{0{,}1} = \frac{7 \,.\, 1{,}1}{1} = 7{,}7$$

c) $9\frac{1}{3} : 4\frac{2}{7} = 5\frac{1}{4} : y$

$2\frac{5}{8} : 1\frac{1}{6} = y : x$

$$(9\frac{1}{3} \,.\, 2\frac{5}{8}) : (4\frac{2}{7} \,.\, 1\frac{1}{6}) = (5\frac{1}{4} \,.\, y) : (y \,.\, x)$$

$$= (\frac{28}{3} \,.\, \frac{21}{8}) : (\frac{30}{7} \,.\, \frac{7}{6}) = 5\frac{1}{4} : x$$

$$x = \frac{\frac{30}{7} \,.\, \frac{7}{6} \,.\, \frac{21}{4}}{\frac{28}{3} \,.\, \frac{21}{8}}$$

$$= \frac{30 \,.\, 7 \,.\, 21 \,.\, 3 \,.\, 8}{7 \,.\, 6 \,.\, 4 \,.\, 28 \,.\, 21} = \frac{15}{14}$$

$$= 1\frac{1}{14}.$$

# X. Teilungsrechnungen.

Teilungsrechnung, auch Repartitions- oder Gesellschaftsrechnung genannt, ist eine Rechnungsart, die die Teilung einer gegebenen Zahl in zwei oder mehrere Teile lehrt, welche zu einander in einem bestimmten Verhältnisse stehen. Die Zahlen, welche das Verhältniß der zu suchenden Teile bezeichnen, werden Verhältnißzahlen genannt.

Wenn eine Zahl nach gegebenen Verhältnissen in Teile zerlegt werden soll, so erhält man diese dadurch, daß man die zu teilende Zahl durch die Summen der Verhältnißzahlen dividirt und den erhaltenen Quotienten mit jeder Verhältnißzahl multiplicirt.

Nach der Proportionslehre lautet diese Regel:

Die Summe der zu teilenden Verhältnißzahlen verhält sich zu jeder einzelnen Verhältnißzahl, wie die zu teilende Größe zu x.

Sind die Verhältnißzahlen Brüche oder gemischte Zahlen, so kann man durch Multiplication mit dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen ihre Nenner in ganze Zahlen umformen. In manchen Fällen ist dieses jedoch nicht nötig.

z. B. Unter die drei ersten Schüler einer Klasse sollen am Ende des Schuljahres 70 Francs so verteilt werden, daß der zweite halb soviel als der erste und der dritte halb soviel als der zweite erhält. Wie viel erhält jeder?

1. Lösung.

Verhältnißzahlen
für den ersten sei 4
für den zweiten $\frac{4}{2} = 2$
für den dritten $\frac{2}{2} = 1$

folglich Anteil des ersten $= \frac{70}{4+2+1} \cdot 4 = \frac{70}{7} \cdot 4 = 40.$

Anteil des zweiten $= \frac{70}{4+2+1} \cdot 2 = \frac{70}{7} \cdot 2 = 20.$

Anteil des dritten $= \frac{70}{4+2+1} \cdot 1 = \frac{70}{7} \cdot 1 = 10.$

Probe $40 + 20 + 10 = 70.$

2. Lösung.

der erste erhält $x$
der zweite „ $\frac{x}{2}$
der dritte „ $\frac{x}{4}$

durch Multiplication mit dem allgemeinen Nenner erhält
der erste $4x$
der zweite $2x$
der dritte $x$

$x + 2x + 4x = 7x.$
$7x = 70$ Francs.
$x = \frac{70}{7} = 10$ Francs.

der dritte erhält 10 Francs
der zweite „ $2 \cdot 10 = 20$ Francs
der erste „ $4 \cdot 10 = 40$ Francs
70 Francs.

3. Art. Durch Proportion.

der erste erhält 1
der zweite „ $\frac{1}{2}$
der dritte „ $\frac{1}{4}$

durch Multiplication mit dem gemeinschaftlichen Nenner
der erste 4
der zweite 2
der dritte 1

der erste: $7 : 4 = 70 : x$
$x = \frac{4 \cdot 70}{7} = 40$ Francs.

der zweite: $7 : 2 = 70 : x$
$x = \frac{2 \cdot 70}{7} = 20$ Francs.

der dritte: $7 : 1 = 70 : x$
$x = \frac{70 \cdot 1}{7} = 10$ Francs.

Wenn die eine oder andere Verhältnißzahl mit einem gewissen Summanden oder Subtrahenden vereinigt, so hat man zunächst von der zu teilenden Zahl die Summe sämmtlicher Summanden zu subtrahiren und zu dieser Differenz die Summe sämmtlicher Subtrahenden zu addiren.

Die Summe von 6400 Mark R. W. soll unter 4 Personen so verteilt werden, daß B 300 Mark mehr als die Hälfte des Anteiles des A erhalte, C $1\frac{1}{2}$ mal soviel als A weniger 500 Mark und D $\frac{3}{4}$ mal so viel als A und 600 Mark. Wie groß ist der Anteil eines jeden?

Auflösung.

$$6400 - 300 - 600 + 500$$
$$= 6400 - 900 + 500$$
$$= 6000.$$

Die Verhältnißzahlen sind : 1, $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ demnach

$$\frac{6000}{1 + \frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} + \frac{3}{4}} = \frac{6000}{\frac{15}{4}} = \frac{6000 \cdot 4}{15} = 1600.$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | erhält also | | 1600 Mark |
| B | „ | $\frac{1}{2} \cdot 1600 + 300 =$ | 1100 Mark |
| C | „ | $\frac{3}{2} \cdot 1600 - 500 =$ | 1900 Mark |
| D | „ | $\frac{3}{4} \cdot 1600 + 600 =$ | 1800 Mark |
| Probe: | | Summa | 6400 Mark |

In manchen Aufgaben ergeben sich die Verhältnißzahlen als die Producte oder Quotienten anderer Zahlen, die als Ausdrücke verschiedener Bestimmungen dienen. z. B.

Vier Metzger pachten eine Wiese um 78 Francs.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| A | läßt | 20 | Stück Vieh | 45 | Tage weiden |
| B | „ | 24 | „ „ | 40 | „ „ |
| C | „ | 36 | „ „ | 40 | „ „ |
| D | „ | 90 | „ „ | 18 | „ „ |

Was hat jeder zu dem Pachtzins beizutragen?

1. Lösung.

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | $20 \cdot 45 = 900$ | Die Verhältnißzahlen dividirt durch den gemeinschaftlichen Factor 180: | 5 |
| B | $24 \cdot 30 = 720$ | | 4 |
| C | $36 \cdot 40 = 1440$ | | 8 |
| D | $90 \cdot 18 = 1620$ | | 9 |
| | | | 26 |

A) $\frac{78 \cdot 5}{26} = 15$ Francs.

B) $\frac{78 \cdot 4}{26} = 12$ Francs.

C) $\frac{48 \cdot 8}{26} = 24$ Francs.

D) $\frac{78 \cdot 9}{26} = 27$ Francs.

Probe: Summa 78 Francs

2. Lösung nach Proportion
(bleibt dem Unterrichte vorbehalten).

# X. Vermischungs- oder Alligationsrechnung.

Sollen Gegenstände (Ingredienzien) von verschiedenen Preisen und in verschiedenen Mengen (Quantitäten) vermischt werden, so geschieht die Berechnung dieser Gegenstände durch die sogenannte Alligationsrechnung.

Regel: Die Summe der Werte der Bestandteile einer Mischung dividirt durch die Anzahl der Bestandteile gibt den Durchschnitts- oder Mittelwert.

z. B. Man schmilzt 84 Mark Silber vom Feingehalte $15\frac{1}{2}$ und 105 Mark Silber vom Feingehalte 11; welches ist der Feingehalt der Mischung?

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 84 Mark | $15\frac{1}{2}$ löt. | Silber enthalten | $84 \cdot 15\frac{1}{2} = 1302$ | Teile Feingehalt |
| 105 „ | 11 „ | „ „ | $105 \cdot 11 = 1155$ | „ „ |
| 189 | | | 2457 | |

$$\frac{2457}{189} = 13 \text{ lötiges Silber.}$$

Ein Weinwirt mischt 30 Liter Wein à 1 Mark R. W. mit 45 Liter à 2 Mark und gießt noch 5 Liter Wasser dazu; wie hoch kommt der Liter dieser Mischung?

| | | | |
|---|---|---|---|
| 30 Liter | à 1 Mark | $= 30 \cdot 1 = 30$ | Mark. |
| 45 „ | à 2 „ | $= 45 \cdot 2 = 90$ | „ |
| 5 „ | à 0 „ | $= 5 \cdot 0 = 0$ | „ |
| 80 Liter | kosten | 120 | Mark. |

$$1 \text{ Liter} = \frac{120}{80} = 1\frac{40}{80} = 1\frac{1}{2} \text{ Mark.}$$

Bei diesen Alligationsrechnungen ist besonders jene Art hervorzuheben, bei welcher das Verhältniß der Teile nicht unmittelbar angegeben ist, sondern erst gesucht werden muß.

Die Regel hiefür ist folgende:

Der Unterschied zwischen dem mittleren Wert und dem geringeren gibt die Verhältnißzahl der besseren Sorte, hingegen der Unterschied zwischen dem besseren Wert und dem mittleren gibt die Verhältnißzahl der geringeren Gattung.

1) Jemand hat 2 Sorten Wein, den Liter zu 1 Mark 25 Pf. und zu 1 Mark 10 Pf.; wie viel hat er von jeder Sorte zu nehmen, um 60 Liter zu 1 Mark 15 Pf. zu erhalten?

x Liter à 125 Pf. kosten 125 x Pf.

(60 — x) Liter à 110 Pf. „ (60 — x) . 110 Pf.

Der Betrag der Einnahme, wenn er die beiden Sorten einzeln verkauft, muß gleich sein dem Erlös des gemischten Weines.

$125\,x + (60 - x)\,.\,110 = 60\,.\,115$
$125\,x + 6600 - 110\,x = 6900$
$15\,x = 6900 - 6600 = 300$
$x = 20$ Liter.

Er nimmt 20 Liter à 125 Pf. = 25 Mark
und 40 Liter à 110 Pf. = 44 Mark

60 Liter à 115 Pf. = 69 Mark

2) Wie viel Wasser muß man zu einem Weine gießen, von welchem der Liter 60 Pf. kostet, um einen Hektoliter zu erhalten, von welchem der Liter 45 Pf. kostet?

x Liter Wasser kosten 0 Pf.
(100 — x) à 60 Pf. = 60 . (100 — x)

$60\,.\,(100 - x) = 100\,.\,45$
$6000 - 60\,x = 4500$
$6000 - 4500 = 60\,x$
$1500 = 60\,x$

$$x = \frac{1500}{60} = 25 \text{ Liter Wasser.}$$

75 Liter à 60 Pf. = 45 Mark
25 Liter à 0 Pf. = 0 Mark

100 Liter à 45 Pf. = 45 Mark.

## XI. Zinsrechnung.

Unter Zins (Interessen) versteht man die Vergütung für die zeitweise Benützung eines Kapitals.

Wenn man sich den jährlichen Zins als Bruchteil des Capitals denkt, so heißt dieser Bruchteil Zinsfuß.

z. B. Für die Benützung einer Geldsumme von 1120 Francs werden jährlich 56 Francs Zinsen bezahlt; es ist demnach der Zinsfuß $\frac{56}{1120} = \frac{1}{20}$.

Gewöhnlich drückt man den Zinsfuß in Prozenten aus und zwar für 1 Jahr. Der Zinsfuß $\frac{1}{20}$ ist sonach $\frac{100}{20}$ % = 5 %.

Das Wort Procent vom lateinischen „pro centum" heißt „für hundert".

Die Größe der Zinsen ist abhängig:

a) von der Größe des Kapitals,
b) von der Größe des Zinsfußes,
c) von der Größe der Zeit.

Es kommen deßhalb bei der Zinsrechnung in Betracht:

1) die Zinsen,
2) das Kapital,
3) der Zinsfuß (Procent),
4) die Zeit.

Drei dieser Stücke sind jedesmal gegeben und das vierte wird gesucht. Was die Zeit betrifft, so wird im allgemeinen 1 Monat zu 30 Tagen und 1 Jahr zu 360 Tagen gerechnet.

Anm. 1. Der Tag, an welchem ein Capital ausgeliehen worden, wird in der Regel für einen vollen Tag gerechnet, dagegen der Tag, an dem es zurückzuzahlen ist, nicht mitgezählt.

Anm. 2. z = Zinsen.
c = Kapital.
p = Zinsfuß (Procent).
t = Zeit (tempus).

## 1. Die Zinsen.

$$z = \frac{c}{100} \cdot p \cdot t$$

d. h. man findet die Zinsen, indem man den hundertsten Teil des Kapitals mit dem Zinsfuß und der Zeit (in Jahren ausgedrückt) multiplicirt.

Wie viel Zinsen trägt ein Kapital von 4240 Mark in $2\frac{1}{2}$ Jahren zu $4\frac{1}{2}$%?

1. Lösung.

$$z = \frac{4240}{100} \cdot 2\frac{1}{2} \cdot 4\frac{1}{2}$$
$$= \frac{4240 \cdot 5 \cdot 9}{100 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1060 \cdot 5 \cdot 9}{100}$$
$$= \frac{53 \cdot 9}{1} = 477 \text{ Mark Zinsen.}$$

2. Lösung nach Proportion.

Bedingungssatz: 100 Mark tragen in 1 Jahr $4\frac{1}{2}$ Mark Zinsen.
Fragesatz: 4240 „ „ „ $2\frac{1}{2}$ „ x „ „

$$\left.\begin{matrix} 100 : 4240 \\ 1 : 2\frac{1}{2} \end{matrix}\right\} = 4\frac{1}{2} : x$$

$$x = \frac{4240 \cdot 2\frac{1}{2} \cdot 4\frac{1}{2}}{100} = 477 \text{ Mark Zinsen.}$$

3. Lösung durch Schluß.

100 Mark Kapital tragen in 1 Jahr $4\frac{1}{2}$ Mark Zinsen

1 Mark Kapital trägt in 1 Jahr $\frac{4\frac{1}{2}}{100}$ „ „

4240 Mark Kapital tragen in 1 Jahre $\frac{4\frac{1}{2} \cdot 4240}{100}$ „ „

4240 Mark Kapital tragen in $2\frac{1}{2}$ Jahren $\frac{4\frac{1}{2} \cdot 4240 \cdot 2\frac{1}{2}}{100}$ „ „

$$= \frac{9 \cdot 4240 \cdot 5}{100 \cdot 2 \cdot 2} = 477 \text{ Mark.}$$

## 2. Das Capital.

$$c = \frac{100 \cdot z}{p \cdot t}$$

d. h. man findet das Kapital, indem man die hundertfachen Zinsen dividirt durch das Product aus Zinsfuß und Zeit (in Jahren ausgedrückt).

z. B. Welches Kapital trägt in $2\frac{1}{2}$ Jahren zu $4\frac{1}{2}$ % 477 fl. öst. W. Zins?

1. Lösung.

$$c = \frac{100 \cdot 477}{4\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{2}} = \frac{100 \cdot 477 \cdot 2 \cdot 2}{9 \cdot 5} = \frac{20 \cdot 53 \cdot 2 \cdot 2}{1}$$

$= 4240$ fl. öst. W. Kapital.

2. Lösung nach Proportion.

Bedingungssatz: $4\frac{1}{2}$ fl. öst. W. Zinsen tragen 1 Jahr 100 fl. Kapital öst. W.

Fragesatz: 477 fl. öst. W. Zins tragen $2\frac{1}{2}$ Jahr x fl. öst. W. Kapital.

$$\left.\begin{array}{l} 4\frac{1}{2} : 477 \\ 2\frac{1}{2} : 1 \end{array}\right\} = 100 : x$$

$$x = \frac{477 \cdot 1 \cdot 100}{4\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{2}} = \frac{477 \cdot 1 \cdot 100 \cdot 2 \cdot 2}{9 \cdot 5} = 4240 \text{ fl. ö. W. Kapital.}$$

3. Lösung durch Schluß.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $4\frac{1}{2}$ fl. öst. W. Zinsen tragen in | 1 Jahr | 100 | fl. öst. W. Kapital |
| 1 " " " " " | 1 " | $\frac{100}{4\frac{1}{2}}$ | " " " " |
| 447 " " " " " | 1 " | $\frac{100 \cdot 477}{4\frac{1}{2}}$ | " " " " |
| 477 " " " " " | $2\frac{1}{2}$ " | $\frac{100 \cdot 477}{4\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{2}}$ | " " " " |

$$\frac{100 \cdot 477}{4\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{2}} = 4240 \text{ fl. öst. W. Kapital.}$$

## 3. Zinsfuss (Procent).

$$p = \frac{100 \cdot z}{c \cdot t}$$

d. h. man findet den Zinsfuß, wenn man die hundertfachen Zinsen dividirt durch das Product aus Kapital und Zeit (in Jahren ausgedrückt).

z. B. Zu wieviel Procent oder zu welchem Zinsfuß ist ein Kapital von 4240 Francs ausgeliehen, wenn dasselbe in $2\frac{1}{2}$ Jahren 477 Francs Zinsen tragen soll?

1. Lösung.

$$p = \frac{100 \cdot 477}{4240 \cdot 2\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{100 \cdot 477 \cdot 2}{4240 \cdot 5} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}\ \%.$$

2. Lösung nach Proportion.

Bedingungssatz: 4240 Frcs Kap. tragen in $2\frac{1}{2}$ Jahren 477 Frcs. Zins.

Fragesatz: 100 „ „ „ „ 1 Jahr x „ „

$$\left.\begin{matrix} 4240 : 100 \\ 2\frac{1}{2} : 1 \end{matrix}\right\} = 477 : x$$

$$x = \frac{100 \cdot 1 \cdot 477}{4240 \cdot 2\frac{1}{2}} = 4\frac{1}{2}\ \%.$$

3. Lösung durch Schluß.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 4240 | Francs Kapital tragen in $2\frac{1}{2}$ Jahren | 477 | Francs | Zinsen |
| 4240 | „ „ „ „ 1 Jahr | $\frac{477}{2\frac{1}{2}}$ | „ | „ |
| 1 | „ „ „ „ 1 „ | $\frac{477}{2\frac{1}{2} \cdot 4240}$ | „ | „ |
| 100 | „ „ „ „ 1 „ | $\frac{477 \cdot 100}{2\frac{1}{2} \cdot 4240}$ | „ | „ |

$$\frac{477 \cdot 100}{2\frac{1}{2} \cdot 4240} = 4\frac{1}{2}\ \%.$$

## 4. Zeit.

$$t = \frac{100 \cdot z}{c \cdot p}$$

d. h. man findet die Zeit (in Jahren ausgedrückt), wenn man den hundertfachen Zins dividirt durch das Product aus Kapital und Zinsfuß.

z. B. Wie lange muß ein Kapital von 2440 Mark ausgeliehen sein, um zu $4\frac{1}{2}$ % 477 Mark Zinsen zu tragen?

1. Lösung.

$$t = \frac{100 \cdot 477}{4240 \cdot 4\frac{1}{2}} = \frac{100 \cdot 477 \cdot 2}{4240 \cdot 9}$$

$$= \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}\ \text{Jahre.}$$

2. Lösung nach Proportion.

Bedingungssatz: 100 Mark Kapital tragen $4\frac{1}{2}$ Mark Zins in 1 Jahr.
Fragesatz: 4240 „ „ „ 477 „ „ „ x „

$$\left.\begin{matrix} 4240 : 100 \\ 4\frac{1}{2} : 477 \end{matrix}\right\} = 1 : x$$

$$x = \frac{100 \,.\, 477 \,.\, 1}{4240 \,.\, 4\frac{1}{2}} = \frac{5}{2} = 2\tfrac{1}{2} \text{ Jahr.}$$

3. Lösung nach Schluß.

100 Mark Kapital tragen $4\frac{1}{2}$ Mark Zinsen in 1 Jahr
1 „ „ „ $4\frac{1}{2}$ „ „ „ $\frac{100}{4\frac{1}{2}}$ Jahren
4240 „ „ „ $4\frac{1}{2}$ „ „ „ $\frac{100}{4240 \,.\, 4\frac{1}{2}}$ „
4240 „ „ „ 477 „ „ „ $\frac{100 \,.\, 477}{4240 \,.\, 4\frac{1}{2}}$ „

$$\frac{100 \,.\, 477}{4240 \,.\, 4\frac{1}{2}} = \frac{5}{2} = 2\tfrac{1}{2} \text{ Jahren.}$$

Bei den Aufgaben der Zinsrechnung kann auch der Fall vorkommen, daß Kapital und Zins in einer Summe vereinigt angegeben sind.

Ein gewisses Kapital wurde zu 4 % ausgeliehen, nach $2\frac{1}{2}$ Jahren erhielt man an Kapital und Zinsen zusammen die Summe von 616 Mark. Wie groß ist das Kapital und welchen Zins trug dasselbe?

Bedingungssatz: 110 Mark in $2\frac{1}{2}$ Jahren angewachsen von 100 Mark
Fragesatz: 616 „ „ $2\frac{1}{2}$ „ „ „ x „

$$110 : 616 = 100 : x$$

$$x = \frac{616 \,.\, 100}{110} = 560 \text{ Mark Kapital.}$$

$$\text{Zinsen} = 616 - 560 = 56 \text{ Mark Zinsen.}$$

Die Zinsen können auch direkt gefunden werden durch die Proportion.

$$110 : 616 = 10 : x$$

$$x = \frac{616 \,.\, 10}{110} = 56 \text{ Mark.}$$

## 5. Zinseszinsenrechnung.

Wenn die Zinsen eines Kapitals zum Kapital geschlagen und nun gleich diesem wieder verzinst werden, erhält man zusammengesetzte Zinsen oder Zinseszinsen.

z. B. Wie hoch werden 5000 Francs Kapital in 4 Jahren bei ganzjährigen Zinseszinsen à 5% anwachsen und wieviel betragen die dabei entstandenen Zinseszinsen?

1. Jahr. $\frac{5000 \cdot 5}{100} = 250$ Frcs. Zinsen.

2. Jahr. $\frac{5250 \cdot 5}{100} = \frac{2625}{10} = 262{,}5$ Frcs. Zinsen.

3. Jahr. $\frac{5512{,}5 \cdot 5}{100} = 275{,}625$ Frcs. Zinsen.

4. Jahr. $\frac{5788{,}125 \cdot 5}{100} = 289{,}40625$ Frcs. Zinsen.

a) das Kapital wächst an auf
5788,125 Francs.

b) die dabei entstandenen Zinseszinsen betragen
$250 + 262{,}5 + 275{,}625 + 289{,}40625 = 1077{,}53125$ Frcs.
um $1077{,}53125 - 4 \cdot 250$
= 77 Francs 53,125 Centimes mehr als die einfachen Zinsen.

## 6. Berechnung des mittleren Zinsfusses mehrerer Kapitalien.

1) Welches ist der mittlere Zinsfuß von vier gleichen Kapitalien, die zu $4\frac{1}{2}$, 4, $3\frac{1}{2}$ und 3% ausgeliehen sind?

Mittlerer Zinsfuß $= \frac{4\frac{1}{2} + 4 + 3\frac{1}{2} + 3}{4} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$ %.

2) 2000 Mark sind ausgeliehen zu 3%, 4000 Mark zu 4% und 1500 Mark zu 6%, welches ist der mittlere Zinsfuß?

$$\begin{array}{rcl} 2000 \cdot 3 &=& 6000 \\ 4000 \cdot 4 &=& 16000 \\ 1500 \cdot 6 &=& 9000 \\ \hline 7500 &=& 31000 \end{array}$$

$\frac{31000}{7500} = \frac{62}{15} = 4\frac{2}{15}$ % mittlerer Zinsfuß.

3) Von 3 gleichen Kapitalien ist a) auf 6 Monat zu 4%, b) auf 5 Monat zu 3% und c) $\frac{1}{4}$ Jahr zu 5% ausgeliehen, welches ist der mittlere Zinsfuß dieser Kapitalien?

$$\begin{array}{rcl} 6 \cdot 4 &=& 24 \\ 5 \cdot 3 &=& 15 \\ 3 \cdot 5 &=& 15 \\ \hline 14 &=& 54 \end{array}$$

$\frac{54}{14} = 3\frac{6}{7}$ % mittlerer Zinsfuß.

# XII. Procentrechnung.

## 1. Berechnung von Gewinn und Verlust, Provision, Courtage, Tara etc.

Unter Procentfuß, beziehungsweise Promillefuß (pro mille d. h. für 1000) versteht man diejenige Zahl, welche angibt, wie viel von der zu grunde gelegten Zahl 100 oder 1000 zu rechnen ist.

z. B. 5 Procent oder 5 % heißt soviel als: von je 100 sind 5 zu rechnen.
2 Promille, abgekürzt 2 ‰ heißt: von je 1000 sind 2 zu rechnen.

Den Procentfuß (Promillefuß) kann man somit als den Zähler eines Bruches betrachten, dessen Nenner 100 (1000) ist.

Der Wert, von dem gewisse Procente zu berechnen sind, wird gewöhnlich Kapital genannt.

Anm. Eine kurze Erklärung einiger termini technici dürfte hier am Platze sein.

a) Gewinn heißt der Ueberschuß des Erlöses über die aufgewendeten Kosten.

b) Unter Spesen versteht man einen Aufwand, eine Auslage, (Kosten).
Wird die Auslage nicht durch die Einnahme oder den Erlös gedeckt, so entsteht ein Verlust oder Deficit.
Bei Berechnung des Gewinns und Verlustes ist stets die Summe aller Auslagen zu grunde zu legen.
Geschäfte, die einen namhaften Ueberschuß über die Auslage gewähren, rentiren sich.

c) Dividende nennt man den bei einem Geschäfte, an welchem sich mehrere beteiligen, erzielten Gewinn, der in der Regel nach der Vermögenseinlage verteilt wird.

d) Tantieme heißt der vertragsmäßig festgesetzte Anteil am Geschäftsgewinn oder auch am gesammten Geschäftsertrage.

e) In Procenten werden häufig gewisse Vergütungen berechnet. z. B.
   $\alpha$) Provision ist die Vergütung, welche der Commissionär (Auftragnehmer) vom Committenten (Auftraggeber) für die Ausführung des Auftrages (Commission) erhält.
   $\beta$) Courtage (Mäcklergebühr) ist die dem Mäckler für besorgte Vermittlungsgeschäfte gewährte Vergütung.
   $\gamma$) Assecuranz- oder Versicherungs-Prämie ist die Vergütung, die der Versicherte (Assecurirte oder Assecurat) an den Versicherer (Assecurator oder Assecurant) zu entrichten hat. Die den Versicherungsvertrag bezeugende Urkunde heißt Versicherungsschein (Police).
   $\delta$) Delcredere ist die Gewährleistung des Commissionärs für die von ihm auf fremde Rechnung verkauften Waaren.
   $\varepsilon$) Unter „Bruttogewicht" versteht man das Gewicht der Waare sammt Verpackung (Emballage), unter „Nettogewicht" das Gewicht der Waare allein, unter „Taragewicht" das Gewicht der Verpackung allein. Letzteres wird gewöhnlich in Procenten des Bruttogewichtes vom Hundert gegeben.

Der Kürze wegen bezeichnen wir das Kapital mit c, den Procentfuß mit p und den Procentbetrag mit u.

Anm. p kann auch den Promillefuß bedeuten.

$$u = \frac{c}{100} \cdot p$$

Man findet den Procentbetrag, wenn man den hundertsten Teil des Kapitals mit dem Procentfuß multiplicirt.

z. B. 1) Wieviel beträgt die Provision von 6600 Francs zu 3%?

$$u = \frac{6600 \cdot 3}{100} = 198 \text{ Francs.}$$

2) Wie viel beträgt die Assecuranzgebühr von 12000 Mark zu 2‰.

$$u = \frac{12000 \cdot 2}{1000} = 24 \text{ Mark.}$$

3) Man verkauft eine Waare mit 5 % Gewinn um $7\frac{1}{2}$ Francs; a) wie teuer mußte sie gegeben werden, wenn dabei 8% gewonnen werden sollten? b) Wie hoch kommt sie im Ankauf?

a) Bedingungssatz: 105 Frs. mit Gewinn vom 100 Frs. $7\frac{1}{2}$ Frs. Verkauf
Fragesatz: 108 „ „ „ „ 100 „ x „ „

$$105 : 108 = 7\tfrac{1}{2} : x$$

$$x = \frac{108 \cdot 7\frac{1}{2}}{5} = \frac{108 \cdot 15}{105 \cdot 2} = \frac{54}{7} = 7\tfrac{5}{7} \text{ Francs.}$$

b)

$$108 : 7\tfrac{1}{2} = 100 : x$$

$$x = \frac{100 \cdot 15}{108 \cdot 2} = \frac{50 \cdot 5}{36} = \frac{125}{18} = 6\tfrac{17}{18} \text{ Francs.}$$

$$p = \frac{100 \cdot u}{c}$$

d. h. man findet den Procentfuß, wenn man den hundertfachen Procentbetrag durch das Kapital dividirt.

z. B. 1) Eine Concursmasse bezahlt statt 12820 Mark d. R. W. nur 2564 Mark; wieviel % verlieren die Gläubiger?

$$12820 - 2564 = 10256.$$

$$p = \frac{100 \cdot 10256}{12820} = 80\% \text{ verlieren die Gläubiger.}$$

2) Von einer Waare, die beim Empfang 6546 Zollpfd. wog, sind 120 Zollpfd. eingetrocknet; wieviel %?

$$p = \frac{100 \cdot 120}{6546} = \frac{2000}{1091} = 1{,}83 \%.$$

3) Der Einkauf beträgt 7852 Fr., der Gewinn 863 Fr. 72 Cs.; wieviel %?

$$p = \frac{100 \cdot 863{,}72}{7852} = \frac{86372}{7852} = 11\%.$$

4) Wenn einer Versicherungssumme von 4000 Mark eine Prämie von 5 Mark entspricht, wieviel Promille sind gerechnet?

$$p = \frac{5 \cdot 1000}{4000} = \frac{5}{4} = 1\tfrac{1}{4} ‰.$$

$$c = \frac{100 \cdot u}{p}$$

d. h. das Kapital wird gefunden, indem man den hundertfachen Procentbetrag durch den Procentfuß dividirt.

z. B. Der Gewinn zu $8\frac{1}{2}$ % beträgt 64 fl. 9 Nkr. öst. W.; wie groß ist der Einkauf?

$$c = \frac{100 \;.\; 64{,}09}{8\frac{1}{2}} = \frac{100 \;.\; 64{,}09 \;.\; 2}{17} = \frac{12818}{17}$$

$= 754$ fl. öst. W. Einkauf.

## 2. Rabattrechnung.

Unter Rabatt versteht man im allgemeinen den Abzug, welchen der Verkäufer dem Käufer gewährt. Er wird meistens in Procent ausgedrückt.

z. B. 1) Wieviel beträgt der 4% Rabatt von 1205 Mark?

$$x = \frac{1205 \;.\; 4}{100} = \frac{4820}{100} = 48{,}2 \text{ Mark.}$$

2) Wenn man von einer gewissen Summe 4% Rabatt abzieht, bleiben noch 1156 fl. 80 Nkr. öst. W. übrig; wie groß war jene Summe?

Bedingungssatz: 96 fl. werden ohne Abzug 100 fl.
Fragesatz: 1156,8 „ „ x „

$$96 : 1156{,}8 = 100 : x$$

$$x = \frac{1156{,}8 \;.\; 100}{96} = 1205 \text{ fl. öst. W.}$$

3) Wieviel Procent Rabatt rechnet man, wenn 1156,8 fl. statt 1205 fl. bezahlt wurden?

bei 1205 fl. beträgt der Rabatt 48,2 fl.
bei 100 fl. „ „ „ x

$$1205 : 100 = 48{,}2 : x$$

$$x = \frac{48{,}2 \;.\; 100}{1205} = 4\%.$$

## 3. Agioberechnung.

Unter dem Agio (Aufgeld) versteht man im allgemeinen die Differenz zwischen dem bestimmten festen Preis einer Geldsorte und dem veränderlichen Marktpreis derselben.

Wenn nämlich Papiergeld in Silber, grobe Scheidemünze in größeres Silbergeld umgewechselt wird, so kommt es im gewöhnlichen Leben vor, daß dafür ein oder mehrere Procente Entschädigung gezahlt werden und diese Mehrbezahlung heißt Agio.

Der Ausdruck „Al pari“ kommt meist bei Obligationen und Wechseln vor.

Wird ein solches Papier um den vollen Nennwert bezahlt, so sagt man, es steht „al pari“, wenn nicht, so steht es entweder „über pari“ oder „unter pari“.

z. B. Jemand wechselt 80 fl. öst. Papiergeld in Silber. Der Banquier fordert $\frac{1}{2}$ % Agio. Wieviel beträgt dieses Agio und was muß der Wechselnde für 80 fl. öst. W. Silber bezahlen?

bei 100 fl. $\frac{1}{2}$ fl. Agio

$$80 \text{ fl. } \frac{80}{200} = \frac{2}{5} \text{ fl. öst. W.} = 40 \text{ Nkr.}$$

80 fl. 40 Nkr. öst. Papier müssen für 80 fl. öst. Silber bezahlt werden.

## XIII. Discontrechnung.

Unter Discont versteht man einen Abzug, der dann stattfindet, wenn ein Kapital vor seiner Verfallzeit zurückbezahlt wird. Besonders kommt der Discont vor, wenn Wechsel vor ihrer Verfallzeit bezahlt werden.

Man unterscheidet den Discont **auf** hundert oder den strengen und den Discont **vom** hundert oder den gewöhnlichen Discont.

z. B. Welches ist der baare Wert einer nach $3\frac{1}{2}$ Jahren fälligen Forderung von $1028\frac{1}{2}$ fl. öst. W. bei 6% Disconto und wie groß ist der Disconto selbst?

1. Strenger Disconto. (auf 100)

Bedingungssatz: 121 fl. öst. W. Kap. nach $3\frac{1}{2}$ Jahren zahlb. 100 fl. ö. W.
Fragesatz: $1028\frac{1}{2}$ fl. „ „ „ „ $3\frac{1}{2}$ „ „ x

$$121 : 1028\tfrac{1}{2} = 100 : x$$

$$x = \frac{2057 \cdot 100}{2 \cdot 121} = 850 \text{ fl. öst. W.}$$

Die Baarzahlung beträgt 850 fl. öst. W., der
Disconto $1028\frac{1}{2} - 850 = 178\frac{1}{2}$ fl. öst. W.
Dies ist der Zins von 850 fl. öst. W. zu 6% in $3\frac{1}{2}$ Jahren.

Der Discont auf hundert ist also immer der Zins der Baarforderung und bei Berechnung desselben wird weder Gläubiger noch Schuldner in Nachteil kommen.

2. Einfacher Disconto. (vom 100)

Statt 100 fl. ö. W. Kapital in $3\frac{1}{2}$ Jahren 79 fl. öst. W. Baarzahlung.
„ $1028\frac{1}{2}$ fl. „ „ „ „ $3\frac{1}{2}$ „ x „ „ „

$$100 : 1028\tfrac{1}{2} = 79 : x$$

$$x = \frac{2057 \cdot 79}{2 \cdot 100} = 812\tfrac{103}{200} \text{ fl. öst. W. ist die Baarforderung.}$$

$$1028\tfrac{1}{2} - 812\frac{103}{200} = 215\frac{197}{200} \text{ ist der Disconto.}$$

Diese Summe ist der Zins von $1028\frac{1}{2}$ fl. öst. W. in $3\frac{1}{2}$ Jahren zu 6%.

Der einfache Discont oder der Discont vom Hundert ist also immer der Zins der Schuldforderung.

# XIV. Terminrechnung.

Die Terminrechnung hat die Aufgabe, für mehrere nach verschiedenen Zeiten zahlbare oder fällige unverzinsliche Kapitalien eine mittlere gemeinsame Verfallzeit (einen mittleren gemeinsamen Zahlungstermin) aufzusuchen, zu welcher die ganze Summe dieser Kapitalien auf einmal entrichtet werden kann, ohne daß weder Gläubiger noch Schuldner verkürzt werden.

z. B. Ein Kaufmann hat in 4 Terminen nachstehende Zahlungen zu leisten:

300 Francs nach 4 Monaten.
400 Francs nach 8 Monaten.
500 Francs nach 1 Jahre.
700 Francs nach 2 Jahren 10 Monaten.

Wann kann die ganze Summe von 1900 Francs auf einmal bezahlt werden, wenn 5% Zinsen berechnet werden?

Auflösung.

Die Summe der Zinsen, welche sich der Schuldner bis zur Abtragung der ganzen Schuld aus den einzelnen Posten verschaffen kann, muß gleich sein dem Zins aus der Gesammtsumme in der gesuchten Zeit x bei gleichem Zinsfuß, daher

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 300 Frs. | in 4 | Monaten | zahlbar | geben | denselben | Zins | wie | 1200 | Frs. | in 1 M. |
| 400 „ | „ 8 | „ | „ | „ | „ | „ | „ | 3200 | „ | „ 1 „ |
| 500 „ | „ 12 | „ | „ | „ | „ | „ | „ | 6000 | „ | „ 1 „ |
| 700 „ | „ 34 | „ | „ | „ | „ | „ | „ | 23800 | „ | „ 1 „ |
| | | | | | | | | 34200 | | in 1 Mt. |

Aus den einzelnen Posten erhält man also gerade soviel Zins, wie aus 34200 Frcs. in 1 Monat oder aus 1 Frc. in 34200 Monat oder endlich aus

$$1900 \text{ Frcs. in } \frac{34200}{1900} = 18 \text{ Monat.}$$

Hieraus ist ersichtlich, daß es nicht auf die Höhe des Zinsfußes ankommt, und daß die Aufgabe auf folgende einfache Art gelöst wird.

$$\begin{array}{r} 300 \;.\; 4 = 1200 \\ 400 \;.\; 8 = 3200 \\ 500 \;.\; 12 = 6000 \\ 700 \;.\; 34 = 23800 \\ \hline 1900 \;:\; 34200 = 1 : x \end{array}$$

$$x = \frac{34200 \;.\; 1}{1900} = 18 \text{ Monat.}$$

# Anhang.

## Metrische Masse, Gewichte und Münzen.

### I. Längenmass.

Die Einheit ist der Meter.*) Er ist der 40 millionste Teil des Erdumfanges.

1 Meter = 10 Decimeter = 100 Centimeter = 1000 Millimeter;
1 „ = 10 „ = 100 „
1 „ = 10 „

10 Meter = 1 Dekameter.
100 „ = 1 Hektometer.
1000 „ = 1 Kilometer.
1 Kilometer ist ungefähr ¼ Wegstunde.
7500 Meter = 1 Meile.

Anm. 1 dm = 0,1 m.
1 cm = 0,01 m.
1 mm = 0,001 m.

### II. Flächenmass.

Die Einheit ist der Quadratmeter (□$^{m}$), nämlich ein Viereck, das einen Meter lang und einen Meter breit ist.

1 □ Meter = 100 □ Decim. = 10000 □ Centim. = 1000000 □ Millim.
1 □ „ = 100 □ „ = 10000 □ „
1 □ „ = 100 □ „

100 □ Meter = 1 □ Dekameter = 1 Ar
10000 □ Meter = 100 Are = 1 Hektar.

Hektar und Ar sind das Flächenmaß für Grundstücke (Feldmaß).

### III. Körpermass.

Die Einheit ist der Cubikmeter, ein Würfel, der 1 Meter lang, 1 Meter breit und 1 Meter hoch ist.

1 Cubik$^{m}$ = 1000 Cubik$^{dm}$ = 1000000 Cubik$^{cm}$ = 1000000000 Cubik$^{mm}$
1 „ = 1000 „ = 1000000 „
1 „ = 1000 „

Für das Holzmaß ist die Einheit der Ster (stère) = 1 Cubikmeter.

### IV. Hohlmass.

(Maß für Flüssigkeiten, Getreide, Früchte ꝛc. ꝛc.)

Die Einheit ist der Liter und dieser ist gleich dem Inhalte eines Cubikdecimeters.

10 Liter = 1 Dekaliter; 1000 Liter = 1 Kiloliter.
100 Liter = 1 Hektoliter;

*) Man sagt auch das Meter.

## V. Gewicht.

Die Einheit ist das Kilogramm oder Kilo; es ist das Gewicht eines Cubikdecimeters oder eines Liters destillirten*) Wassers bei +4° Celsius.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 Kilogramm | = | 100 Dekagramm | = | 1000 Gramm | | |
| | | 1 „ | = | 10 „ | | |
| 1 Gramm | = | 10 Decigramm | = | 100 Centigramm | = | 1000 Milligramm. |
| | | 1 „ | = | 10 „ | = | 100 „ |
| | | | | 1 „ | = | 10 „ |

1 neues Pfund = ½ Kilogramm = 500 Gramm.
50 Kilogramm = 100 Pfund = 1 Centner (neu).
1000 Kilogramm = 2000 Pfund = 1 Tonne.

Anm. 1. Kilogramm ist das Gewicht eines Cubikdecimeters destillirten Wassers bei +4° Celsius. 1 Cubikmeter destillirten Wassers wiegt 1000 Kilogramm = 1 Tonne. Man sieht daraus, in welch' engem Zusammenhange die Körpermaße mit den Gewichten stehen.

Anm. 2. Dieses Gewicht gilt auch für das Medicinal-, Gold-, Silber-, Juwelen- und Perlengewicht.

## VI. Papiermass.

1 Ballen = 10 Rieß; 1 Rieß = 20 Buch; 1 Buch { 24 Bogen Schreibpapier. 25 Bogen Druckpapier.

## VII. Zeitmass.

1 Jahr hat 12 Monate oder 52 Wochen oder 365 Tage (366 Tage im Schaltjahre).

1 Monat hat 30 Tage (Januar, März, Mai, Juli, August, October und December haben 31 Tage, der Februar hat 28, im Schaltjahre 29 Tage).

1 Woche hat 7 Tage (6 Arbeitstage), 1 Tag 24 Stunden, eine Stunde 60 Minuten, 1 Minute 60 Secunden.

## VIII. Winkelmass.

Der Kreis hat 360° (Grad); 1° (Grad) = 60 Minuten; 1 Minute = 60 Sekunden. Der rechte Winkel (Quadrant) hat 360 : 4 = 90° (Grad)

## IX.

Außer dem Papiergeld sind Gold, Silber, Nickel und Kupfermünzen im Umlaufe.

Die ausländischen Goldmünzen sind dem Course unterworfen, sie wechseln, d. h. steigen und fallen in ihrem Werte.

Die deutschen Reichsgoldmünzen sind dem Course nicht unterworfen.

*) chemisch reinen

## Die zwölf deutschen Reichsmünzen.

| a) drei aus Gold: | | | b) fünf aus Silber: | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 20 Mark | = | 11 fl. 40 kr. | 5 Mark | = | 2 fl. 55 kr. |
| 10 „ | = | 5 „ 50 „ | 2 „ | = | 1 „ 10 „ |
| 5 „ | = | 2 „ 55 „ | 1 „ | = | — „ 35 „ |
| | | | $\frac{1}{2}$ „ | = | — „ $17\frac{1}{2}$ „ (50 Pf.) |
| | | | $\frac{1}{5}$ „ | = | — „ 7 „ (20 Pf.) |

| c) zwei aus Nickel: | | | d) zwei aus Kupfer: |
|---|---|---|---|
| 10 Reichspfennige | = | $3\frac{1}{2}$ kr. | 2 Reichspfennige 3 ($2\frac{4}{5}$) alte Pfennige |
| 5 „ | = | $1\frac{3}{4}$ kr. | 1 „ 1 ($1\frac{2}{5}$) „ „ |

Außerdem kommen am meisten folgende Silbermünzen im gewöhnlichen Verkehre vor:

1 fl. öster. W. = 2 Mark.
1 „ „ „ = 100 Neukr.
1 öst. Doppel fl. = 2 fl. 20 kr.
1 Frank = 28 kr. südd. W.
1 Frank = 100 Centimes = 80 Reichspf.
1 Fünffrankst. = 2 fl. 20 kr. = 4 Mark d. R. W.

Anm. Oesterr. Gulden verwandelt man in Mark, wenn man mit 2 multiplicirt. z. B. 40 fl. öst. W. ? Mark?

40 öst. fl. = 40 . 2 = 80 Mark.

Franks verwandelt man in Mark, wenn man von der Summe den 5. Teil subtrahirt. z. B. 400 Francs ? Mark.

400 Franks = 400 — 80 = 320 Mark.

Mark verwandelt man in öst. fl., wenn man mit 2 dividirt. z. B. 172 Mark ? öst. fl.

172 : 2 = 86 öst. fl.

Mark verwandelt man in Franks, wenn man den 4. Teil der Summe noch zu dieser addirt. z. B. 320 Mark ? öst. fl.

320 + 80 = 40 Franks.

### Abkürzungen.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| m | = | Meter. | $\square^{m}$ | = | Quadratmeter. |
| dm | = | Decimeter. | $\square^{dm}$ | = | „ decimeter. |
| cm | = | Centimeter. | $\square^{cm}$ | = | „ centimeter. |
| mm | = | Millimeter. | $\square^{mm}$ | = | „ millimeter. |
| Dm | = | Dekameter. | $\square^{Dm}$ | = | „ dekameter. |
| Hm | = | Hektometer. | $\square^{Hm}$ | = | „ hektometer. |
| Km | = | Kilometer. | $\square^{Km}$ | = | „ kilometer. |
| $cub^{m}$ | = | Cubikmeter. | Kgr | = | Kilogramm. |
| $cub^{dm}$ | = | „ decimeter. | Hgr | = | Hektogramm. |
| $cub^{cm}$ | = | „ centimeter. | Dgr | = | Dekagramm. |
| $cub^{mm}$ | = | „ millimeter. | gr | = | Gramm. |
| L | = | Liter. | dgr | = | Decigramm. |
| DL | = | Dekaliter. | cgr | = | Centigramm. |
| HL | = | Hektoliter. | mgr | = | Milligramm. |
| KL | = | Kiloliter. | Ctr | = | Centner. |
| | | | ℔ | = | Pfund. |

fl. öst. W. = Gulden öster. Währung. Frcs. = Franks.
Nkr. = Neukreuzer. cs. = Centimes.
Frc. = Frank. Pf. = Pfennige.
$^0$ Grad.
$'$ Minuten.
$''$ Secunden.

# Von den Quadrat- und Cubikwurzeln.

## Von den Quadratwurzeln.

Wenn man irgend eine Zahl mit sich selbst multiplicirt, so heißt man das Resultat das Quadrat der gegebenen Zahl. Umgekehrt versteht man unter der Quadratwurzel aus einer Zahl die Zahl, welche quadrirt oder mit sich selbst multiplicirt die vorgelegte gibt. Die Zahl, aus welcher die Wurzel gezogen werden soll, heißt der Radicand. So ist

| | | | |
|---|---|---|---|
| $1^2 = 1$ | $\sqrt{1} = 1$ | $6^2 = 36$ | $\sqrt{36} = 6$ |
| $2^2 = 4$ | $\sqrt{4} = 2$ | $7^2 = 49$ | $\sqrt{49} = 7$ |
| $3^2 = 9$ | $\sqrt{9} = 3$ | $8^2 = 64$ | $\sqrt{64} = 8$ |
| $4^2 = 16$ | $\sqrt{16} = 4$ | $9^2 = 81$ | $\sqrt{81} = 9$ |
| $5^2 = 25$ | $\sqrt{25} = 5$ | $10^2 = 100$ | $\sqrt{100} = 10$ |

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; folglich $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = a + b$.

### Beispiele.

| 1) | 2) | 3) |
|---|---|---|
| $\sqrt{2\|56} = 16$ | $\sqrt{21\|43\|69} = 463$ | $\sqrt{36\|96\|64} = 608$ |
| $a^2 = 1$  ab | 16 | 36 |
| 156 | 543 | —96 |
| $2ab = 12$ | (86) | (120) |
| $b^2 = 36$ | 516 | 000 |
| 156 | 2769 | 9664 |
| 0 | (923) | (1208) |
| | 2769 | 9664 |
| | 0 | 0 |

Anm. 1. Um anzuzeigen, daß man aus einer Zahl die Quadratwurzel ziehen soll, gebraucht man das Zeichen $\sqrt[2]{\phantom{x}}$ oder einfach $\sqrt{\phantom{x}}$.

Eine ausführliche Erklärung des Gesetzes, nach welchem das Ausziehen der Quadratwurzel stattfindet, ist dem Unterrichte vorbehalten.

Anm. 2. Hat man aus einem Decimalbruche die Quadratwurzel zu ziehen, so hat man die Einteilung, vom Komma ausgehend, nach links und rechts in Klassen von zwei zu zwei Stellen vorzunehmen und fehlende Stellen durch Nullen zu ersetzen. Ein gemeiner Bruch wird vor dem Ausziehen der Quadratwurzel der Kürze wegen in einen Decimalbruch verwandelt.

1) $\sqrt{0,01|39|24|} = 0,118;$

1
39
(21)
21
1824
(228)
1824
0

2) $\sqrt{61,|23|80|} = 7,82\ldots$

49
1223
(148)
1184
3980
(1562)
3124
856

3) $2\frac{14}{25} = \sqrt{2,|56|} = 1,6$

1
156
(26)
156
0

Anm. 3. Die Probe über die Richtigkeit der Rechnung besteht darin, daß man die gefundene Quadratwurzel mit sich selbst multiplicirt und den etwaigen Rest zum Produkte addirt, alsdann muß der Radicand zum Vorschein kommen.

Probe ad Beispiel 2.

$7,82 \,.\, 7,82 + 856 = 611524 + 856 = 61,2380 = 61,238.$

## Von den Cubikwurzeln.

Wenn man irgend eine Zahl 3 mal mit sich selbst multiplicirt, so heißt man das Produkt $a \,.\, a \,.\, a = a^3$ den Cubus von a. Umgekehrt versteht man unter der Cubikwurzel aus einer Zahl diejenige Zahl, welche 3 mal mit sich selbst multiplicirt oder zur 3. Potenz erhoben die vorgelegte gibt.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $1^3 = 1$ | $\sqrt[3]{1} = 1$ | $6^3 = 216$ | $\sqrt[3]{216} = 6$ |
| $2^3 = 8$ | $\sqrt[3]{8} = 2$ | $7^3 = 343$ | $\sqrt[3]{343} = 7$ |
| $3^3 = 27$ | $\sqrt[3]{27} = 3$ | $8^3 = 512$ | $\sqrt[3]{512} = 8$ |
| $4^3 = 64$ | $\sqrt[3]{64} = 4$ | $9^3 = 729$ | $\sqrt[3]{729} = 9$ |
| $5^3 = 125$ | $\sqrt[3]{125} = 5$ | $10^3 = 1000$ | $\sqrt[3]{1000} = 10$ |

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; folglich

$$\sqrt{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3} = a + b.$$

1) $\sqrt[3]{12|167} = 23$

$a^3 = 8$
4167
$3a^2b = 36$
$3ab^2 = 54$
$b^3 = 27$
4167
0

$a = 2$ $3a = 6$
$a^2 = 4$ $b^2 = 9$
$3ab^2 = 12$ $3a^2 = 54$

2) $\sqrt[3]{34|645|976} = 326$

27
7645
(27)
54
36
8
5768
1877976
(3072)
18432
3456
216
1877976
0

Anm 1. Um anzuzeigen, daß man aus einer Zahl die Cubikwurzel ziehen soll, bedient man sich des Zeichens $\sqrt[3]{\ }$

Eine Erklärung des Gesetzes, nach welchem das Ausziehen der Cubikwurzel stattfindet, bleibt dem Unterrichte vorbehalten.

Anm. 2. Bei einem Decimalbruche hat man die Einteilung vom Komma aus nach rechts und links in Klassen von drei zu drei Stellen vorzunehmen und fehlende Stellen durch Nullen zu ersetzen. Ein gemeiner Bruch wird der Kürze wegen vor dem Ausziehen der Cubikwurzel in einen Decimalbruch verwandelt.

1) $\sqrt[3]{0,|000|314|332} = 0,068$

216
98432
(108)
864
1152
512
98432
0

2) $\sqrt[3]{14\frac{4}{5}} = \sqrt[3]{14,|800} = 2,45\ .\ .$

8
6800
(12)
48
96
64
5824
976000
(1728)
8640
1800
125
882125
93875

Anm. 3. Um die Richtigkeit der Rechnung zu prüfen, wird man den gefundenen Wert dreimal mit sich selbst multipliciren und zu diesem Produkte einen etwaigen Rest addiren, alsdann muß der Radicand zum Vorschein kommen.

Probe ad 2. $2,45\ .\ 2,45\ .\ 2,45 + 93875 = 6,0025\ .\ 2,45 + 93875 = 14,706125 + 93875 = 14,800000 = 14,8 = 14\frac{4}{5}$.

# Berichtigungen.

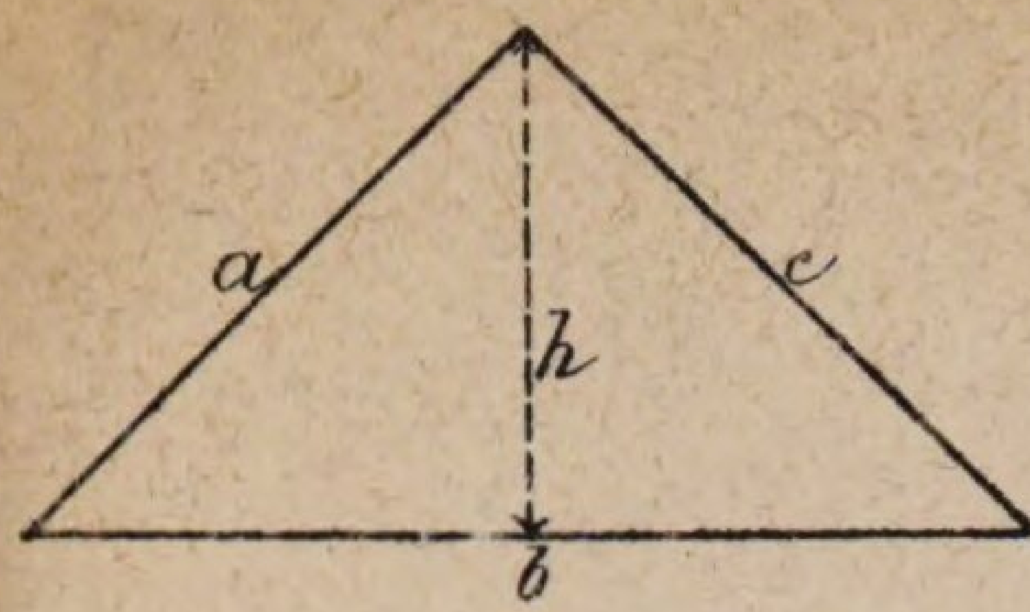
1) Es kommen aus Versehen im ersten Druckbogen die zwei bekannten Multiplicationszeichen $\times$ und . neben einander in ein und derselben Aufgabe zur Anwendung. Der Consequenz halber ist immer als Multiplicationszeichen der Punkt (.) zu setzen.

2) In dem Capitel „Multiplication und Division" Seite 9 ist immer statt „Glieder" das Wort „Zahlen" zu setzen.

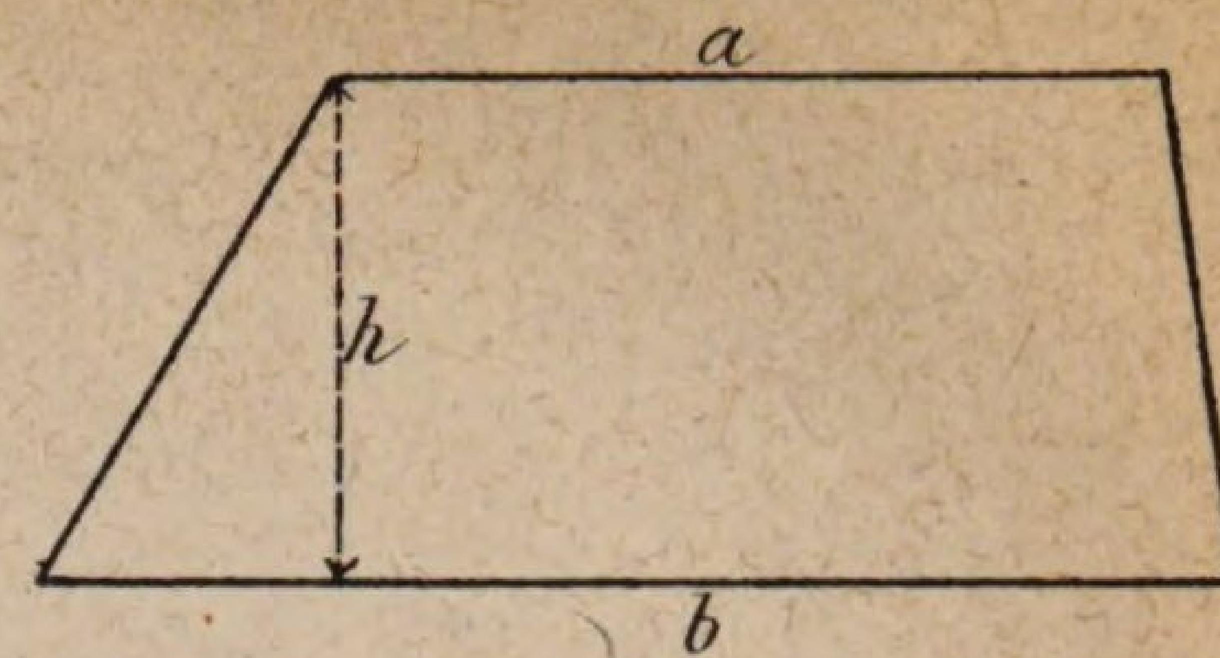
3) Seite 16 „Primteiler" statt „Primtheiler".

4) Seite 28 „Bruchsbruch" statt „Bruchbruch".

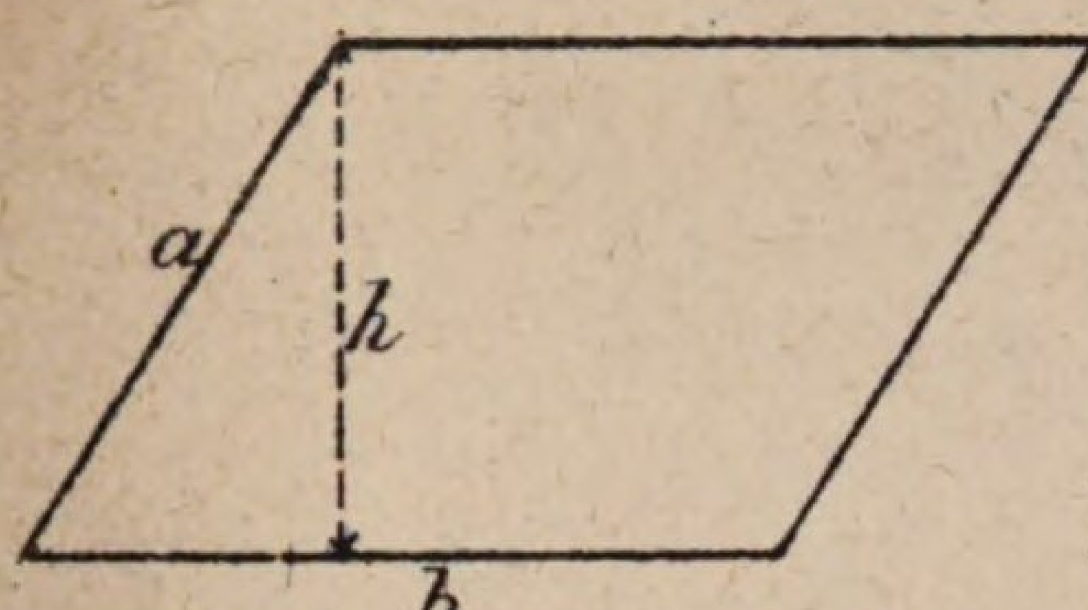
Dreieck.



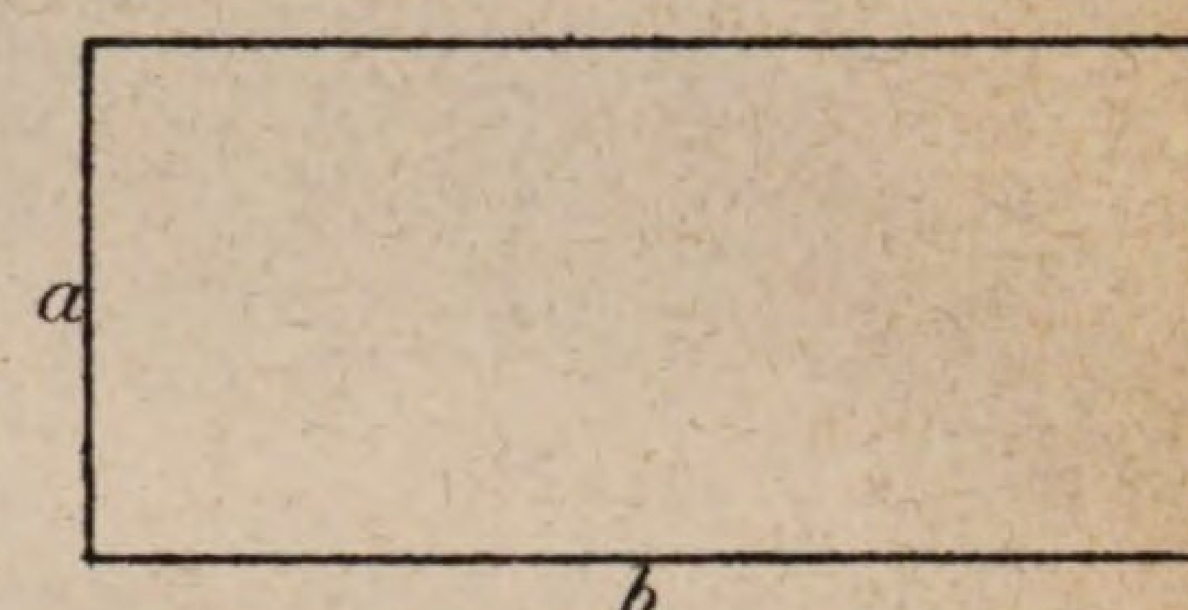

Trapez



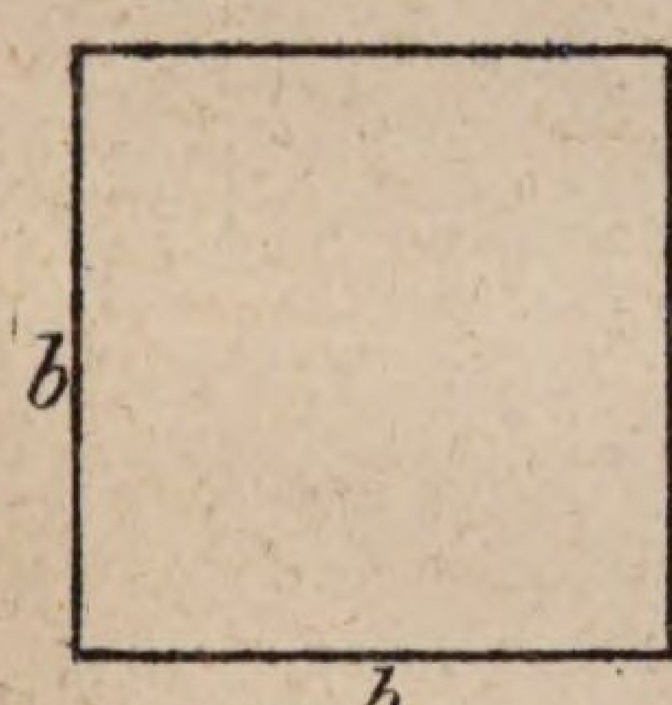

Parallelogramm



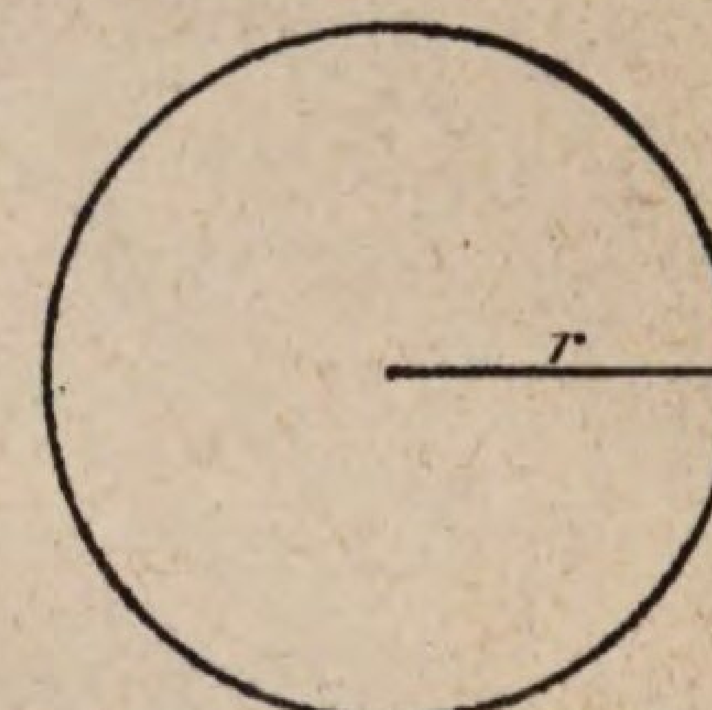

Rechteck.



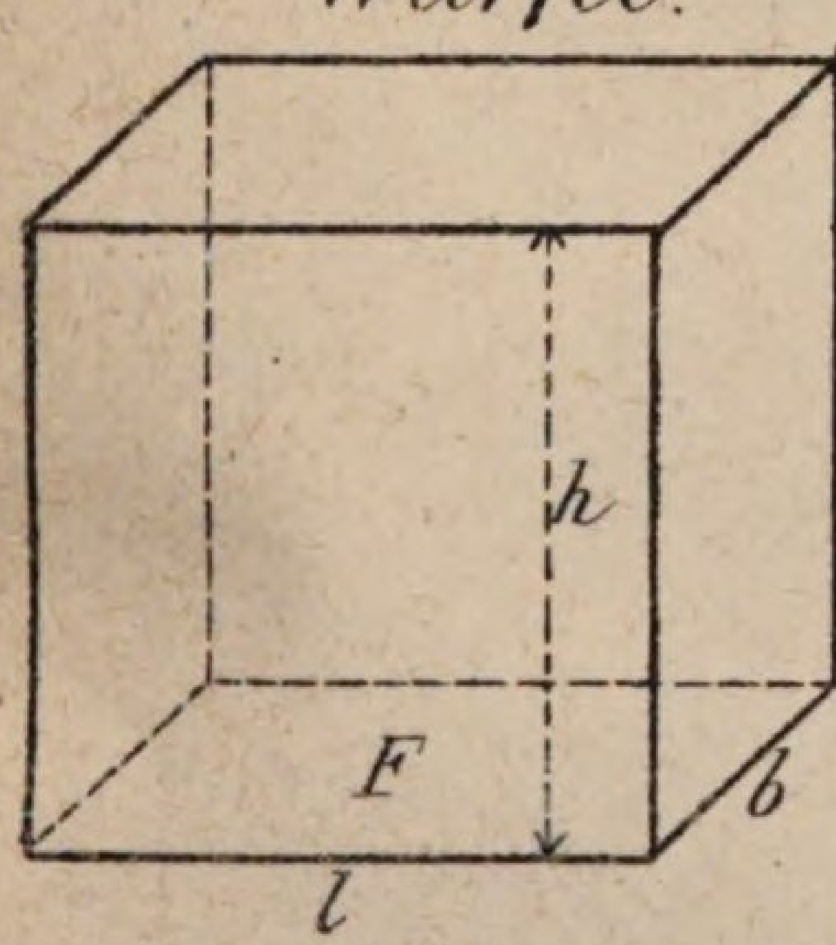

Quadrat



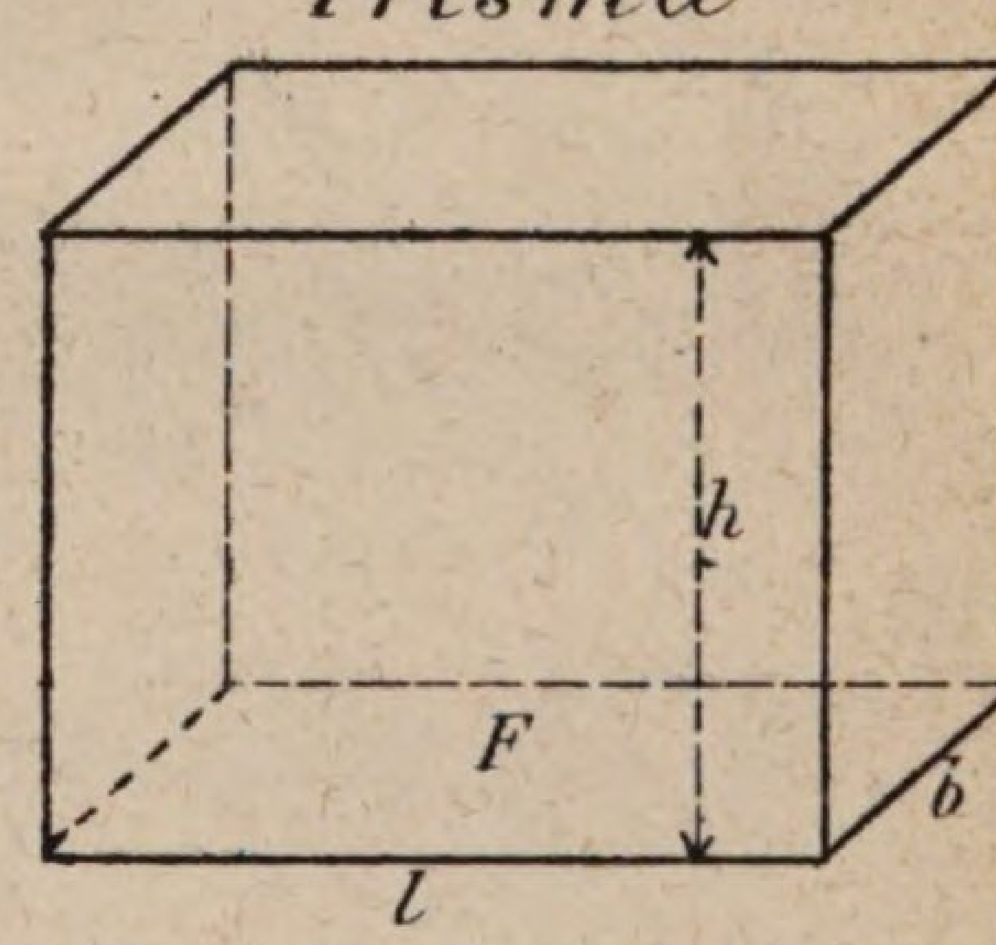

Kreis



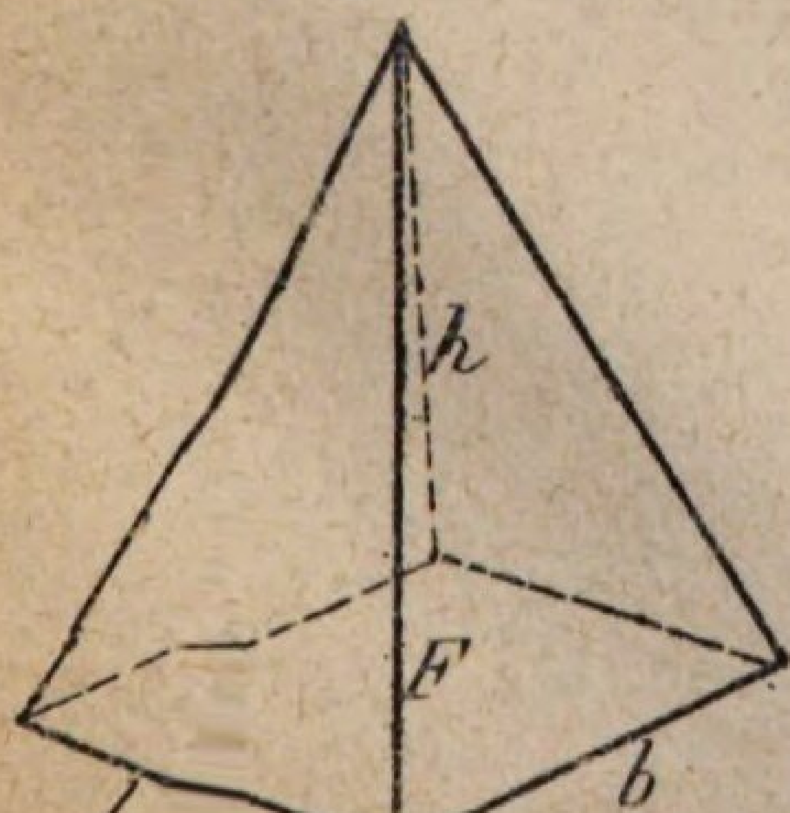

Würfel.



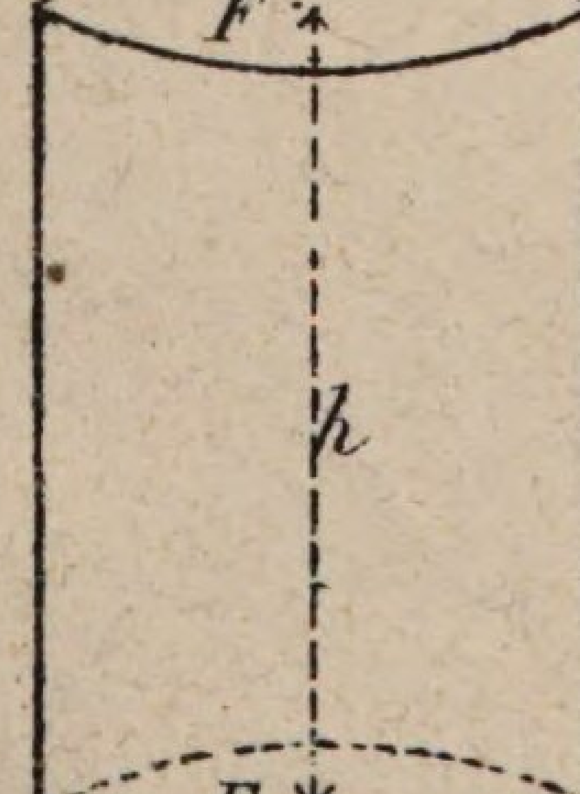

Prisma




Pyramide.




Cylinder




Abgestumpfter Kegel.

